

Introducción a la conjetura de Pierce–Birkhoff y el espectro real

F. Lucas, J. J. Madden, D. Schaub y M. Spivakovsky

Resumen

Sea R un cuerpo real cerrado.

La conjetura de Pierce–Birkhoff afirma que cualquier función polinómica a trozos

$$f : R^n \rightarrow R$$

puede obtenerse a partir del anillo de polinomios $R[x_1, \dots, x_n]$ iterando las operaciones de máximo y mínimo.

La meta de este artículo es dar una introducción a nuestro programa para atacar la conjetura de Pierce–Birkhoff utilizando el espectro real de $R[x_1, \dots, x_n]$ y la noción del ideal separante de dos puntos de $\text{Sper } R[x_1, \dots, x_n]$.

Como parte de este programa se introducirá la conjetura de Conexidad, que afirma que para todo par de puntos $\alpha, \beta \in \text{Sper } \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ existen conjuntos conexos en el espectro real de $R[x_1, \dots, x_n]$ que satisfacen ciertas condiciones. Probaremos que la conjetura de Conexidad implica la conjetura de Pierce–Birkhoff.

1. El enunciado del problema

Todos los anillos en este artículo serán conmutativos y con 1. A lo largo del artículo, R denotará un cuerpo real cerrado, y A el anillo de polinomios $R[x_1, \dots, x_n]$, salvo que se especifique lo contrario.

La conjetura de Pierce–Birkhoff asegura que toda función polinómica a trozos $f : R^n \rightarrow R$ puede expresarse como un máximo o un mínimo de una familia finita de polinomios. Más adelante daremos las definiciones y un enunciado preciso de la conjetura.

Este artículo es una introducción a nuestro programa para probar la conjetura de Pierce–Birkhoff en toda su generalidad (los mejores resultados hasta ahora se deben a Louis Mahé [18], que probó la conjetura para $n = 2$ y obtuvo algunos resultados parciales para $n = 3$ [19]).

Comenzaremos exponiendo la conjetura de Pierce–Birkhoff en su enunciado original, tal como fue expuesta por primera vez por M. Henriksen y J. Isbell a principios de los años sesenta.

Definición 1.1 Una función $f : R^n \rightarrow R$ se dice que es **polinómica a trozos** si R^n puede cubrirse con una colección finita de conjuntos semi-algebraicos cerrados P_i tales que para cada i existe un polinomio $f_i \in A$ que satisface $f|_{P_i} = f_i|_{P_i}$. Dada una función polinómica a trozos f , decimos que f está **definida por** r polinomios si r es el número de polinomios distintos entre los f_i anteriores.

Claramente, cualquier función polinómica a trozos es continua. Las funciones polinómicas a trozos forman un anillo que contiene a A , y que denotaremos $PW(A)$.

Por otra parte, podemos considerar el anillo (reticularmente ordenado) de funciones que se obtienen a partir de A iterando las operaciones de sup e ínf. Como aplicar las operaciones sup e ínf a polinomios produce funciones que son polinómicas a trozos, este anillo está contenido en $PW(A)$ (que es cerrado para sup e ínf). Es natural preguntarse si ambos anillos coinciden o no. El enunciado preciso de la conjetura es:

Conjetura 1 (Pierce-Birkhoff) Si $f : R^n \rightarrow R$ está en $PW(A)$, entonces existe una familia finita de polinomios $g_{ij} \in A$ tales que $f = \sup_i \inf_j (g_{ij})$ (es decir, para todo $x \in R^n$, $f(x) = \sup_i \inf_j (g_{ij}(x))$).

Una pequeña introducción histórica del problema. Una pregunta que sugería la presente conjetura de Pierce–Birkhoff apareció en el artículo de 1956 de Birkhoff y Pierce [4], en el que se definieron por primera vez los f-anillos. La pregunta parece haber sido enunciada algo descuidadamente, y el significado del texto no es fácil de entender.

Según Mel Henriksen, Isbell y él intentaron probar la conjetura como está formulada ahora mientras trabajaban en f-anillos a principios de los años sesenta [8]. Como no obtuvieron resultados significativos, nunca lo mencionaron explícitamente en sus textos.

A principios de los años ochenta, cuando la geometría algebraica real comenzó a convertirse en un campo de investigación importante Isbell describió la pregunta a varios matemáticos en varias reuniones. Efroymsón y Mahé aceptaron el desafío y empezaron a trabajar sobre el problema.

Isbell fue muy generoso en su lectura de la pregunta propuesta por Birkhoff y Pierce en 1956. Él es la persona responsable de que hoy el problema se conozca como la “conjetura de Pierce–Birkhoff”. Fue convencido de que Birkhoff y Pierce querían hacer la pregunta exacta que ahora llamamos la conjetura de Pierce–Birkhoff.

No está claro cómo los nombres Pierce y Birkhoff llegaron a aparecer en el orden inverso del alfabético, a diferencia del orden alfabético utilizado en su artículo del 1956. En vista de la historia del problema, sería más exacto llamarlo “la conjetura de Pierce–Birkhoff–Isbell–Henriksen”.

En 1989 J.J. Madden [16] reformuló la conjetura en términos del espectro real de A y de los ideales separantes.

Más adelante recordaremos la formulación de Madden, así como las definiciones relevantes. Para una introducción general al espectro real, véanse [5], capítulo 7, [2], capítulo II o [22], 4.1, páginas 81 y posteriores (véase también “Bibliographical and historical comments” en la página 109 al final del capítulo).

2. Una reformulación del problema: la búsqueda de los polinomios f_{ij} que separan P_i de P_j por lo menos tan fuertemente como f

Utilizaremos la notación $(f, \{f_i\}_{1 \leq i \leq r}, \{P_i\}_{1 \leq i \leq r})$ de la Definición 1.1.

Conjetura 2 *Después de reemplazar eventualmente la descomposición*

$$R^n = \bigcup_{i=1}^r P_i \tag{1}$$

por una subdivisión mas fina, se verifica lo siguiente. Para todo par $i, j \in \{1, \dots, r\}$ existe un polinomio $f_{ij} \in A$ tal que

$$f_{ij}|_{P_i} \geq f_i|_{P_i} \tag{2}$$

$$f_{ij}|_{P_j} \leq f_j|_{P_j}. \tag{3}$$

Observación 2.1 *Un caso particular importante es $i = j$; en este caso (2) y (3) implican que*

$$f_{ii} = f_i. \tag{4}$$

La Conjetura 2 no cambia si reemplazamos la descomposición 1 por una subdivisión mas fina. Es decir, para demostrar la Conjetura 2 para una descomposición (1) dada, es suficiente demostrarla para una subdivisión mas fina.

Proposición 2.1 *La conjetura 2 y la conjetura de Pierce–Birkhoff son equivalentes.*

Demostración: I. La conjetura 2 implica la conjetura de Pierce–Birkhoff. Sean f_{ij} los polinomios cuya existencia es garantizada por la conjetura 2. Pretendemos que los polinomios $g_{ij} := f_{ij}$ verifican la conclusión de la conjetura de Pierce–Birkhoff. En efecto, sea $h_i = \min_{1 \leq j \leq r} f_{ij}$. Gracias a (2) y (4), tenemos

$$h_i|_{P_i} = f_i|_{P_i}. \tag{5}$$

Gracias a (3),

$$h_i|_{P_j} \leq f_j|_{P_j} \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}. \tag{6}$$

Por consiguiente, $f = \max_{1 \leq i \leq r} h_i$ y la conjetura de Pierce–Birkhoff queda demostrada.

II. Recíprocamente, supongamos que existe una colección finita $\{g_{kl}\} \subset A$, donde l recorre un conjunto finito de índices Φ_k , $1 \leq k \leq t$, tal que

$$f = \max_{1 \leq k \leq t} \min_{l \in \Phi_k} g_{kl}. \quad (7)$$

Subdividiendo los conjuntos P_i en subconjuntos semi-algebraicos cerrados más pequeños, si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para todos $k, k' \in \{1, \dots, t\}$, $l \in \Phi_k$, $l' \in \Phi_{k'}$ y todo i , $1 \leq i \leq r$, el polinomio $g_{kl} - g_{k'l'}$ no cambia de signo sobre P_i .

Sean $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Sean $k \in \{1, \dots, t\}$, $l \in \Phi_k$ tales que

$$f|_{P_i} = g_{kl}. \quad (8)$$

Sea $l' \in \Phi_k$ tal que

$$g_{kl'}|_{P_j} = \min_{l'' \in \Phi_k} g_{kl''}|_{P_j}. \quad (9)$$

Ahora (7), (8) y (9) implican que

$$g_{kl'}|_{P_i} \geq f|_{P_i} \quad \text{y} \quad (10)$$

$$g_{kl'}|_{P_j} \geq f|_{P_j}, \quad (11)$$

lo cual termina la demostración de la Proposición. \square

Corolario 2.1 *La conjetura de Pierce-Birkhoff es cierta en el caso $n = 1$.*

Demostración: Si $n = 1$ es fácil construir polinomios f_{ij} que verifican la conclusión de la Conjetura 2: se puede tomar f_{ij} de la forma $b(x - a)^l$, donde b , a y l dependen de i y j y donde l es un número entero impar suficientemente grande. \square

La idea de Madden para demostrar la Conjetura 2 consiste en tomar subdivisiones cada vez más finas de la descomposición (1) y pasar al límite. El límite de una colección decreciente de conjuntos semi-algebraicos cerrados puede ser interpretado como un punto del espectro real de A .

3. El espectro real de un anillo.

Sea B un anillo. Un punto α en el espectro real de B es, por definición, el dato de un ideal primo \mathfrak{p} de B , y un orden total \leq del anillo cociente B/\mathfrak{p} , o, equivalentemente, del cuerpo de fracciones de B/\mathfrak{p} . Otra forma de definir el punto α es como homomorfismo de B en un cuerpo real cerrado, donde dos homomorfismos se identifican si tienen el mismo núcleo \mathfrak{p} e inducen el mismo orden total en B/\mathfrak{p} .

El ideal \mathfrak{p} se llama soporte de α y se denota por \mathfrak{p}_α , el anillo cociente B/\mathfrak{p}_α por $B[\alpha]$, su cuerpo de fracciones por $B(\alpha)$ y la clausura real de $B(\alpha)$ por $k(\alpha)$. El orden total de $B(\alpha)$ se denota \leq_α . A veces escribiremos $\alpha = (\mathfrak{p}_\alpha, \leq_\alpha)$.

Definición 3.1 *El espectro real de B , denotado $\text{Sper } B$, es la colección de todos los pares*

$$\alpha = (\mathfrak{p}_\alpha, \leq_\alpha),$$

donde \mathfrak{p}_α es un ideal primo de B y \leq_α es un orden total sobre B/\mathfrak{p}_α .

El espectro real $\text{Sper } B$ posee dos topologías naturales. La primera, llamada **topología espectral (o de Harrison)**, está generada por los conjuntos básicos abiertos de la forma

$$U(f_1, \dots, f_k) = \{\alpha \mid f_1(\alpha) > 0, \dots, f_k(\alpha) > 0\}$$

con $f_1, \dots, f_k \in B$. De ahora en adelante, para un elemento $f \in B$, la notación $f(\alpha)$ significa la imagen natural de f en $B[\alpha]$. Cuando $f(\alpha)$ interviene en una afirmación sobre el orden, siempre se sobreentiende el orden \leq_α . Por ejemplo, la desigualdad $f(\alpha) > 0$ significa $f(\alpha) >_\alpha 0$; la notación $|f(\alpha)|$ quiere decir $f(\alpha)$ si $f(\alpha) \geq_\alpha 0$, $-f(\alpha)$ si $f(\alpha) \leq_\alpha 0$. Si B es una R -álgebra entonces $B[\alpha]$ contiene una copia de R , visto como un cuerpo ordenado.

La segunda topología natural definida sobre el espectro real es la topología **constructible** cuyos conjuntos abiertos básicos son de la forma

$$V(f_1, \dots, f_k, g) = \{\alpha \mid f_1(\alpha) > 0, \dots, f_k(\alpha) > 0, g(\alpha) = 0\},$$

donde $f_1, \dots, f_n, g \in B$. Combinaciones booleanas de conjuntos de la forma $V(f_1, \dots, f_n, g)$ se llaman **conjuntos constructibles** de $\text{Sper } B$.

Proposición 3.1 ([5], Proposition 7.1.12, p.114) *Sea B un anillo. Entonces $\text{Sper}(B)$ es compacto para la topología constructible.*

Observación 3.1 *Dado que la topología espectral es más gruesa que la topología constructible, $\text{Sper}(B)$ también es compacto para la topología espectral.*

Denotemos $\text{Maxr}(A)$ el conjunto de puntos $\alpha \in \text{Sper}(A)$ tales que \mathfrak{p}_α es un ideal maximal de A . Vemos $\text{Maxr}(A)$ como un subespacio topológico de $\text{Sper}(A)$ con la topología espectral (respectivamente, constructible). Podemos identificar de forma natural R^n con $\text{Maxr}(A)$: un punto $(a_1, \dots, a_n) \in R^n$ se corresponde con el punto $\alpha = (\mathfrak{p}_\alpha, \leq_\alpha) \in \text{Sper}(A)$, donde \mathfrak{p}_α es el ideal maximal

$$\mathfrak{p}_\alpha = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

y \leq_α es el único orden en R . La topología espectral en $\text{Sper}(A)$ induce la topología euclídea en R^n , mientras que la topología constructible induce la topología discreta en R^n , dado que los subconjuntos de R^n que tienen solo un elemento son semi-algebraicos. La inyección $R^n = \text{Maxr}(A) \hookrightarrow \text{Sper}(A)$ induce una biyección entre los conjuntos semi-algebraicos de R^n y los conjuntos constructibles de $\text{Sper}(A)$: el conjunto $S(f_1, \dots, f_k, g) = \{(a_1, \dots, a_n) \in R^n \mid f_1(a_1, \dots, a_n) > 0, \dots, f_k(a_1, \dots, a_n) > 0, g(a_1, \dots, a_n) = 0\}$ corresponde al conjunto

$$V(f_1, \dots, f_k, g) = \{\alpha \mid f_1(\alpha) > 0, \dots, f_k(\alpha) > 0, g(\alpha) = 0\}$$

([5], theorem 7.2.3). Para un conjunto semi-algebraico $S \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto constructible correspondiente de $\text{Sper}(A)$ se notara por \tilde{S} . Recíprocamente, dado un conjunto constructible $\tilde{S} \subset \text{Sper}(A)$ notaremos por S su conjunto semi-algebraico correspondiente en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 3.1. Si $\text{car } B > 0$, tenemos $\text{Sper } B = \emptyset$. En efecto, un cuerpo ordenado siempre tiene característica 0: el elemento 1 es estrictamente positivo, y la suma de elementos estrictamente positivos no puede ser igual a 0.

Ejemplo 3.2. El espectro real de $\mathbb{R}[x]$. Sea $\alpha \in \text{Sper } \mathbb{R}[x]$. El soporte \mathfrak{p}_α puede tener altura 1 o 0, es decir, \mathfrak{p}_α es o bien el ideal (0), o bien un ideal maximal de $\mathbb{R}[x]$. Si \mathfrak{p}_α es maximal, el cuerpo residual $\frac{\mathbb{R}[x]}{\mathfrak{p}_\alpha}$ puede ser \mathbb{R} o \mathbb{C} . El cuerpo \mathbb{C} no es ordenable, por lo tanto $\frac{\mathbb{R}[x]}{\mathfrak{p}_\alpha} \cong \mathbb{R}$ (en otras palabras, un ideal maximal m de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\frac{\mathbb{R}[x]}{\mathfrak{p}_\alpha} \cong \mathbb{C}$ no puede ser soporte de un punto de $\text{Sper } \mathbb{R}[x]$). El ideal \mathfrak{p}_α tiene la forma $\mathfrak{p}_\alpha \cong (x - a)$ donde $a \in \mathbb{R}$; el conjunto de puntos cerrados de $\text{Sper } \mathbb{R}[x]$ se identifica naturalmente a \mathbb{R} .

El caso

$$\mathfrak{p}_\alpha = (0) \tag{12}$$

es mas interesante. El conjunto de puntos α verificando (12) es el conjunto de todos los ordenes totales del cuerpo $R(x)$.

¿Como clasificar los ordenes totales sobre $R(x)$? Sea $\alpha \in \text{Sper } \mathbb{R}[x]$ tal que $\mathfrak{p}_\alpha = (0)$. La idea es comparar x con todas las constantes reales con respecto al orden \leq_α . Hay tres casos posibles:

Caso 1. $x(\alpha) > a$ para todos $a \in \mathbb{R}$.

Caso 2. $x(\alpha) < a$ para todos $a \in \mathbb{R}$.

Caso 3. Existe un único número real a tal que $|x(\alpha) - a| < \epsilon$ para todo número real ϵ estrictamente positivo.

Cada uno de los Casos 1 y 2 da lugar a un único punto de $\text{Sper } \mathbb{R}[x]$. En el Caso 3, para cada $a \in \mathbb{R}$ hay dos puntos posibles de $\text{Sper } \mathbb{R}[x]$: uno que verifica $x(\alpha) - a > 0$ y otro con $x(\alpha) - a < 0$.

La descripción de $\text{Sper } R[x]$ donde R es cualquier cuerpo real cerrado es similar a la de $\text{Sper } \mathbb{R}[x]$.

Definición 3.2 Sea B un anillo y $\alpha, \beta \in \text{Sper } B$. Se dice que α es una **especialización** de β si $\mathfrak{p}_\beta \subset \mathfrak{p}_\alpha$ y el homomorfismo natural $B[\beta] \rightarrow B[\alpha]$ es compatible con los ordenes \leq_α y \leq_β (esto significa que los elementos no negativos de $B[\beta]$ se aplican a elementos no negativos de $B[\alpha]$).

4. La valoración asociada a un punto del espectro real.

Sea D un dominio ordenado. Notaremos por \bar{D} la envolvente convexa de D en su cuerpo de fracciones $D_{(0)}$:

$$\bar{D} := \{ f \in D_{(0)} \mid d > |f| \text{ para algún } d \in D \}.$$

El anillo \bar{D} es un anillo de valoración, pues para todo elemento $f \in D_{(0)}$, se verifica $f \in \bar{D}$ o $f^{-1} \in \bar{D}$.

Sea B un anillo y α un punto en $\text{Sper } B$. Sea $R_\alpha := \overline{B[\alpha]}$. De esta manera podemos asociar canónicamente a cada punto $\alpha \in \text{Sper } B$ una valoración ν_α de $B(\alpha)$, determinada por el anillo de valoración R_α . Tenemos un homomorfismo natural $B \rightarrow R_\alpha$. La valoración ν_α tiene propiedades siguientes:

- (1) $\nu_\alpha(B[\alpha]) \geq 0$
- (2) Si B es una R -álgebra, para cada par de elementos positivos $y, z \in B(\alpha)$,

$$\nu_\alpha(y) < \nu_\alpha(z) \implies y > Nz, \forall N \in R. \tag{13}$$

La implicación recíproca en (13) no se verifica en general; véase [14] para ejemplos y un estudio sistemático de esta cuestión.

Un ν_α -ideal de B es, por definición, la preimagen en B de un ideal de R_α .

Véase [21] o [2], §II.3 para una información más detallada sobre este tipo de anillos de valoración.

En la siguiente sección daremos una interpretación geométrica de puntos en $\text{Sper } B$ como semi-curvetas.

Hemos definido la valoración ν_α de $B(\alpha)$ como la valoración cuyo anillo de valoración es

$$R_\alpha = \{x \in B(\alpha) \mid \exists z \in B[\alpha], |x| \leq z\}.$$

El ideal maximal de R_α es $M_\alpha = \left\{x \in B(\alpha) \mid |x| < \frac{1}{|z|}, \forall z \in B[\alpha] \setminus \{0\}\right\}$; su cuerpo residual k_α viene dotado de un orden total, inducido por \leq_α . Notaremos por Γ_α el grupo de valores de ν_α .

Si D es un anillo, notaremos por $U(D)$ el grupo multiplicativo de las unidades de D . Recordemos que

$$\Gamma_\alpha \cong \frac{B(\alpha) \setminus \{0\}}{U(R_\alpha)}$$

y que la valoración ν_α puede ser identificada con el homomorfismo natural

$$B(\alpha) \setminus \{0\} \rightarrow \frac{B(\alpha) \setminus \{0\}}{U(R_\alpha)}.$$

Por definición, tenemos un homomorfismo natural

$$B \rightarrow R_\alpha, \tag{14}$$

cuyo núcleo es \mathfrak{p}_α . La valoración ν_α induce una valoración del anillo B , con el grupo de valores Γ_α , en el sentido de *Bourbaki, Algèbre Commutative, Chap. 6*.

Definición 4.1 *El centro de α en $\text{Spec } B$ es la preimagen en B del ideal maximal M_α de R_α .*

Observación 4.1 ([3], [11], [21], [5] 10.1.10, p. 217) *Recíprocamente, el punto α puede ser reconstruido a partir del anillo R_α , especificando unas cuantas condiciones de signo (si B es noetheriano, el número de condiciones de signo a especificar es finito), cosa que explicaremos en seguida. Consideremos un ideal primo $\mathfrak{p} \subset B$ y una valoración ν de $\kappa(\mathfrak{p}) := \frac{B_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}$ con grupo de valores Γ . Sea*

$$r = \dim_{\mathbb{F}_2}(\Gamma/2\Gamma)$$

(si B no es noetheriano, podría ocurrir que $r = \infty$). Sean x_1, \dots, x_r elementos de $\kappa(\mathfrak{p})$ tales que $\nu(x_1), \dots, \nu(x_r)$ induce una base del espacio \mathbb{F}_2 -vectorial $\Gamma/2\Gamma$. Entonces para todo $x \in \kappa(\mathfrak{p})$ existe $f \in \kappa(\mathfrak{p})$ y una unidad u de R_ν tal que $x = ux_1^{\epsilon_1} \cdots x_r^{\epsilon_r} f^2$, donde $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ (para ver esto, observemos que eligiendo f y ϵ_j de una manera conveniente, el valor del cociente u de x por el producto $x_1^{\epsilon_1} \cdots x_r^{\epsilon_r} f^2$ es 0, por lo tanto u es inversible en R_ν). Ahora, especificar un punto $\alpha \in \text{Sper } B$ con soporte \mathfrak{p} equivale a especificar una valoración ν de $\frac{B}{\mathfrak{p}}$, un orden total sobre el cuerpo residual k_ν de R_ν , tal que la envolvente convexa de la imagen de $\frac{B}{\mathfrak{p}}$ en k_ν es k_ν , y las condiciones de signo $\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_r$. Para $x \notin \mathfrak{p}$, el signo de x esta dado por el producto $\text{sgn}(x_1)^{\epsilon_1} \cdots \text{sgn}(x_r)^{\epsilon_r} \text{sgn}(u)$, donde $\text{sgn}(u)$ esta determinado por el orden de k_ν .

Ejemplo 4.1. La valoración asociada al punto cerrado de Sper A cuyo soporte es

$$(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n), (a_1, \dots, a_n) \in R^n,$$

es la valoración trivial de R .

Ejemplo 4.2. En el Ejemplo 3.2, Casos 1 y 2, tenemos $R_\alpha = \mathbb{R}(x)$, por lo tanto ν_α es la valoración trivial de $\mathbb{R}(x)$. En el Caso 3, R_α es el anillo de valoración discreta $\mathbb{R}[x]_{(x-a)}$. En este caso el grupo de valores $\Gamma \cong \mathbb{Z}$ y el \mathbb{F}_2 -espacio vectorial $\frac{\Gamma}{2\Gamma}$ tiene dimensión 1. Por lo tanto, dada la valoración ν_α , hace falta fijar el signo de $x - a$ para determinar un punto del espectro real; hay exactamente dos puntos α del espectro real cuya valoración asociada ν_α es la valoración $(x - a)$ -ádica.

5. Representación de puntos del espectro real por semi-curvetas

Puntos de Sper B admiten la siguiente interpretación geométrica (véase [7], [9], [21], p. 89 y [23] para la construcción y las propiedades de los anillos y los cuerpos de series generalizadas).

Definición 5.1 *Sea k un cuerpo y Γ un grupo abeliano ordenado. El anillo de series generalizadas $k[[t^\Gamma]]$ es el anillo formado por elementos de la forma $\sum_{\gamma} a_\gamma t^\gamma$, $a_\gamma \in k$, tales que el conjunto $\{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$ está bien ordenado.*

El anillo $k[[t^\Gamma]]$ es dotado de la valoración t -ádica natural v con valores en Γ , definida por $v(f) = \inf\{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$, donde $f = \sum_\gamma a_\gamma t^\gamma \in k[[t^\Gamma]]$. Los datos de un orden total sobre k y $\dim_{\mathbb{F}_2}(\Gamma/2\Gamma)$ condiciones de signo definen un orden total sobre $k[[t^\Gamma]]$. En este orden $|t|$ es inferior a cualquier elemento positivo de k . Por ejemplo, si $t^\gamma > 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$ entonces $f > 0$ si y solo si $a_{v(f)} > 0$.

Para un cuerpo ordenado k , notaremos por \bar{k} su cierre real. El siguiente resultado es una variante del teorema de Kaplansky ([9], [10]) para cuerpos valorados ordenados.

Teorema 5.1 ([23], p. 62, Satz 21) *Sea K un cuerpo valorado real, con cuerpo residual k y el grupo de valores Γ . Existe una inyección $K \hookrightarrow \bar{k}((t^\Gamma))$ de cuerpos reales valorados.*

Sea $\alpha \in \text{Sper } B$. En vista de (14) y la Observación 4.1, especificar un punto $\alpha \in \text{Sper } B$ equivale a especificar un orden total de k_α , un homomorfismo

$$B[\alpha] \rightarrow \bar{k}_\alpha[[t^{\Gamma_\alpha}]]$$

y $\dim_{\mathbb{F}_2}(\Gamma_\alpha/2\Gamma_\alpha)$ condiciones de signo, como hemos explicado antes.

Podemos pasar a los espectros habituales (espectros de Zariski) y obtener morfismos

$$\text{Spec}(\bar{k}_\alpha[[t^{\Gamma_\alpha}]]) \rightarrow \text{Spec } B[\alpha] \rightarrow \text{Spec } B.$$

En particular, si $\Gamma_\alpha = \mathbb{Z}$, obtenemos una **curva formal** en $\text{Spec } B$ (una curva analítica si las series son convergentes). Esto motiva la siguiente definición:

Definición 5.2 *Sea k un cuerpo ordenado. Una k -curveta en $\text{Sper}(B)$ es un morfismo de la forma*

$$\alpha : B \rightarrow k[[t^\Gamma]],$$

donde Γ es un grupo ordenado. Una k -**semi-curveta** es una k -curveta α con una elección de signos $\text{sgn } x_1, \dots, \text{sgn } x_r$, donde x_1, \dots, x_r son elementos de B cuyos valores t -ádicos inducen una \mathbb{F}_2 -base de $\Gamma/2\Gamma$.

Hemos explicado cómo asociar a un punto α de $\text{Sper } B$ una \bar{k}_α -semi-curveta. Recíprocamente, dado un cuerpo ordenado k , una k -semi-curveta α determina un ideal primo \mathfrak{p}_α (el ideal que consiste de todos los elementos de B que se anulan idénticamente sobre α) y un orden total sobre B/\mathfrak{p}_α , inducido por el orden del anillo $k[[t^\Gamma]]$ de series formales generalizadas.

En lo que sigue, a menudo describiremos puntos del espectro real especificando semi-curvetas correspondientes.

Ejemplo 5.3: En el Caso 3 del Ejemplo 3.2, el punto α tal que ν_α es la valoración $(x - a)$ -ádica y $x(\alpha) - a > 0$ puede ser representado por la semi-curveta $\alpha : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[[t]]$, donde $\alpha(x - a) = t$. El punto con $x(\alpha) - a < 0$ esta dado por la semi-curveta $\alpha : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[[t]]$, donde $\alpha(x - a) = -t$ (en ambos casos el orden sobre $\mathbb{R}[[t]]$ esta dado por $t > 0$).

Ejemplo 5.4: Consideremos la curveta $\mathbb{R}[x, y] \rightarrow \mathbb{R}[[t]]$, definida por $x \mapsto t^2$, $y \mapsto t^3$, y la semi-curveta, contenida en ella, dada por la condición de signo $t > 0$. Esta semi-curveta no es otra cosa que la rama superior de la cúspide.

6. Una reformulación local de la Conjetura 2 en términos del espectro real

Ahora podemos precisar la idea mencionada al final de §2 de subdividir la descomposición (1) de una manera cada vez más fina y pasar al límite.

Sea f una función sobre R^n polinomial a trozos; consideremos un punto $\alpha \in \text{Sper } A$. Utilizaremos la notación de la Definición 1.1. El recubrimiento $R^n = \bigcup_i P_i$ induce un recubrimiento correspondiente $\text{Sper } A = \bigcup_i \tilde{P}_i$ del espectro real.

Fijemos un i tal que $\alpha \in \tilde{P}_i$. Sea $f_\alpha := f_i$. Llamaremos f_α **un representante polinomial local de f en α** . En general, la elección de i no está determinada por α de una forma única. Cuando usamos la notación f_α , sobreentendemos que hemos hecho la elección.

Conjetura 3 *Para cada $\alpha, \beta \in \text{Sper } A$ existe $f_{\alpha\beta} \in A$ tal que*

$$f_{\alpha\beta}(\alpha) \geq f_\alpha(\alpha) \tag{15}$$

$$f_{\alpha\beta}(\beta) \leq f_\beta(\beta). \tag{16}$$

Proposición 6.1 *La conjetura 3 es equivalente a la conjetura 2 (y, por lo tanto, a la conjetura de Pierce–Birkhoff).*

Demostración: Es evidente que la Conjetura 2 implica la Conjetura 3.

La idea para demostrar la implicación recíproca es utilizar la compacidad del espectro real para la topología constructible. Sea f una función polinomial a trozos. La conjetura 3 dice que para todo $\alpha, \beta \in \text{Sper } A$ existe $f_{\alpha\beta} \in A$ verificando (15) y (16). Existen conjuntos $U_{\alpha\beta}$ y $V_{\alpha\beta}$, constructibles y cerrados para la topología espectral, tales que

$$f_{\alpha\beta}(\alpha') \geq f_\alpha(\alpha') \quad \text{para todo } \alpha' \in U_{\alpha\beta} \text{ y} \tag{17}$$

$$f_{\alpha\beta}(\beta') \leq f_\beta(\beta') \quad \text{para todo } \beta' \in V_{\alpha\beta}. \tag{18}$$

Para cada $\alpha \in \text{Sper } A$ tenemos $\text{Sper } A = \bigcup_{\beta \in \text{Sper } A} V_{\alpha\beta}$. Por compacidad, existe una colección finita $\beta_{\alpha 1}, \beta_{\alpha 2}, \dots, \beta_{\alpha t_\alpha}$ tal que $\text{Sper } A = \bigcup_{1 \leq i \leq t_\alpha} V_{\alpha\beta_{\alpha i}}$. Sea

$U_\alpha := \bigcap_{1 \leq i \leq t_\alpha} U_{\alpha\beta_{\alpha i}}$. Tenemos $\text{Sper } A = \bigcup_{\alpha \in \text{Sper } A} U_\alpha$. Por compacidad, existe una colección finita $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ tal que $\text{Sper } A = \bigcup_{1 \leq i \leq t} U_{\alpha_i}$. Reemplazando

la colección $\{P_i\}_{1 \leq i \leq r}$ por la colección $\{P_i \cap U_{\alpha_j} \cap V_{\alpha_s \beta_{\alpha_s q}}\}$, donde $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j, s \leq t$ y $1 \leq q \leq t_{\alpha_s}$, obtenemos que para cada par $i, j \in \{1, \dots, r\}$ existen

$s \in \{1, \dots, t\}$ y $q \in \{1, \dots, \alpha_s\}$ tales que $P_i \subset U_{\alpha_s}$ y $P_j \subset V_{\alpha_s \beta_{\alpha_s q}}$. Entonces el polinomio $f_{ij} := f_{\alpha_s \beta_{\alpha_s q}}$ verifica la conclusión de la Conjetura 2. \square

Finalmente, demos una reformulación trivial de la Conjetura 3 cuya utilidad se hará evidente en §8.

Conjetura 4 Para cada $\alpha, \beta \in \text{Sper } A$ existe $h \in A$ tal que

$$h(\alpha) \geq f_\alpha(\alpha) - f_\beta(\alpha) \tag{19}$$

$$h(\beta) \leq 0. \tag{20}$$

Proposición 6.2 Las Conjeturas 3 y 4 son equivalentes.

Demostración: Se obtiene $f_{\alpha\beta}$ de h y viceversa utilizando la igualdad $h = f_{\alpha\beta} - f_\beta$. \square

Observación 6.1 La Conjetura 4 se verifica trivialmente si $f_\alpha(\alpha) - f_\beta(\alpha) \leq 0$. En efecto, en este caso $h = 0$ verifica la conclusión de la Conjetura. Por lo tanto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f_\alpha(\alpha) - f_\beta(\alpha) \geq 0$ en la Conjetura 4.

7. El ideal separante de dos puntos α y β del espectro real.

En esta sección, recordamos la noción del **ideal separante**, introducido por Madden en [16].

Definición 7.1 Sea B un anillo. Para $\alpha, \beta \in \text{Sper } B$, el **ideal separante** de α y β , al que notaremos por $\langle \alpha, \beta \rangle$, es el ideal de B generado por todos los elementos $f \in B$ que cambian de signo entre α y β , es decir, todos los f tales que $f(\alpha) \geq 0$ y $f(\beta) \leq 0$.

Ejemplo 7.1. 1. Sean α y β dos puntos cerrados distintos de $\text{Sper } A$. Más generalmente, se pueden tomar dos puntos α y β cuyos centros en R^n son dos puntos cerrados distintos de $\text{Sper } A$. Sea (a_1, \dots, a_n) el centro del segmento que une el centro de α con el centro de β . Sean $b_1, \dots, b_n \in R$ tales que el hiperplano definido por la ecuación $h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n b_j(x_j - a_j) = 0$ no contiene los centros de α y β . Entonces el polinomio lineal h cambia de signo entre α y β ; tenemos $h \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Tomando un elemento $\epsilon \in R$ suficientemente pequeño, obtenemos $h + \epsilon \in \langle \alpha, \beta \rangle$, por lo tanto $\epsilon \in \langle \alpha, \beta \rangle$ y $1 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. En este caso $\langle \alpha, \beta \rangle = A$.

Ejemplo 7.2. Sean ahora $\alpha, \beta \in \text{Sper } A$ dos puntos dados por semi-curvetas centradas en el mismo punto cerrado de R^n , pero con tangentes distintas. Por ejemplo, podemos tomar $\alpha(t) = (a_1 t, \dots, a_n t)$, $\beta(t) = (b_1 t, \dots, b_n t)$, donde $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in R^n$ son distintos y no nulos. Entonces existe

una función lineal $h = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ que cambia de signo entre α y β . Además, esta propiedad se conserva si reemplazamos $c = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$ por un

$$c' = (c'_1, \dots, c'_n) \in R^n$$

suficientemente próximo a c . De esta manera podemos construir n funciones lineales linealmente independientes $h_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $1 \leq i \leq n$. Esto implica que $x_1, \dots, x_n \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Por otra parte, cualquier polinomio que cambia de signo entre α y β tiene que anularse en el centro común de α y β , por lo tanto $\langle \alpha, \beta \rangle = (x_1, \dots, x_n)$.

Observación 7.1 *Más adelante veremos que la conjetura de Pierce–Birkhoff está relacionada con el estudio del ideal $\langle \alpha, \beta \rangle$ cuando $\alpha : A \rightarrow R[[t]]$ y $\beta : A \rightarrow R[[t]]$ son dos semi-curvetas con el mismo centro y la misma tangente.*

Utilizaremos las siguientes propiedades básicas del ideal separante, demostradas en [16]:

Proposición 7.1 *Conservamos la notación anterior. Se verifican las propiedades siguientes:*

- (1) $\langle \alpha, \beta \rangle$ es a la vez un ν_α -ideal y un ν_β -ideal.
- (2) α y β inducen el mismo orden sobre $\frac{B}{\langle \alpha, \beta \rangle}$ (en particular, el conjunto de los ν_α -ideales que contienen $\langle \alpha, \beta \rangle$ coincide con el conjunto de los ν_β -ideales que contienen $\langle \alpha, \beta \rangle$).
- (3) $\langle \alpha, \beta \rangle$ es el ideal más pequeño (con respecto a inclusión), entre los ideales que verifican (1) y (2).
- (4) Si α y β no tienen una especialización común entonces $\langle \alpha, \beta \rangle = B$.
- (5) Si $\langle \alpha, \beta \rangle \subsetneq B$, el ideal $\sqrt{\langle \alpha, \beta \rangle}$ es primo y, junto con el orden sobre $\frac{B}{\sqrt{\langle \alpha, \beta \rangle}}$ inducido por el orden determinado por α y β sobre $\frac{B}{\langle \alpha, \beta \rangle}$, define un punto de Sper B que es la más general especialización común de α y β .

8. La reformulación de la conjetura de Pierce–Birkhoff en términos del ideal separante

Empecemos con una Proposición que vincula el ideal separante con la Conjetura 4.

Proposición 8.1 [16] *Sea B un anillo y $\alpha, \beta \in \text{Sper } B$. Sea $g \in B$ tal que*

$$g(\alpha) \geq 0. \tag{21}$$

Tenemos $g \in \langle \alpha, \beta \rangle$ si y solo si existe $h \in A$ tal que

$$h(\alpha) \geq g(\alpha) \quad \text{y} \tag{22}$$

$$h(\beta) \leq 0. \tag{23}$$

Demostración: Si $g(\beta) \leq 0$ entonces $g \in \langle \alpha, \beta \rangle$ y $h = 0$ verifica (22) y (23), por lo tanto la Proposición es cierta.

De ahora en adelante, supongamos que

$$g(\beta) \geq 0. \tag{24}$$

I. Supongamos que existe h que verifica (22) y (23). En vista de (21)–(23) obtenemos

$$h \in \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{25}$$

Las desigualdades (22)–(24) implican que

$$h - g \in \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{26}$$

Utilizando (25) y (26) obtenemos $g \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

II. Recíprocamente, supongamos que $g \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Podemos escribir $g = \sum_{i=1}^l a_i f_i$, donde $a_i, f_i \in B$, $f_i(\alpha) \geq 0$ y $f_i(\beta) \leq 0$. Sea

$$b_i = a_i^2 \quad \text{si } a_i(\alpha) \geq 1 \tag{27}$$

$$= 1 \quad \text{si } a_i(\alpha) < 1. \tag{28}$$

Entonces $h := \sum_{i=1}^l b_i f_i$ verifica las desigualdades (22) y (23). Esto termina la demostración de la Proposición. \square

Las Proposiciones 8.1, 6.1 y 6.2 muestran que la conjetura de Pierce–Birkhoff es equivalente a una afirmación puramente local sobre ideales separantes y el espectro real. A saber, tenemos:

Conjetura 5 (Conjetura de Pierce–Birkhoff local en α, β) Sean α, β puntos en $\text{Sper } A$ y f una función polinomial a trozos. Sea $f_\alpha \in A$ un representante local de f en α y $f_\beta \in A$ un representante local de f en β . Entonces $f_\alpha - f_\beta \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Los resultados anteriores, cuya fuente original es Madden [16], demuestran que la conjetura de Pierce–Birkhoff se verifica si y solo si la conjetura de Pierce–Birkhoff local se verifica para todos los pares $\alpha, \beta \in \text{Sper } A$.

9. Las conjeturas de Separación y de Conexidad.

La siguiente conjetura, ligeramente mas débil, fue propuesta por Madden (aquí enunciamos la contrapositiva de la formulación original de Madden, por ser mejor adaptada a nuestros métodos).

Conjetura 6 (La conjetura de Separación.) Sean $\alpha, \beta \in \text{Sper } A$ y sea $g \in A \setminus \langle \alpha, \beta \rangle$. Entonces α y β pertenecen a la misma componente conexa del conjunto $\text{Sper } A \setminus \{g = 0\}$.

En seguida demostraremos que la conjetura de Separación es equivalente al caso $r = 2$ de la conjetura de Pierce–Birkhoff (es decir, el caso cuando la función f polinomial por trozos esta definida por dos polinomios). Primero, recordemos un resultado general sobre componentes conexas de conjuntos constructibles.

Notación: Utilizaremos la notación \coprod para notar la reunión disjunta de conjuntos.

Proposición 9.1 ([5], Theorems 2.4.4 and 7.5.1). *sea $A = R[x_1, \dots, x_n]$ y sea X un subconjunto constructible de $\text{Sper}(A)$. Entonces X puede ser escrito como*

$$X = \coprod_{i=1}^r X_i \quad (29)$$

donde cada X_i es constructible y conexo en la topología espectral. En otras palabras, X tiene un número finito de componentes conexas en la topología espectral, y cada una de estas componentes es constructible.

Proposición 9.2 *La conjetura de Separación equivale al caso particular de la conjetura de Pierce–Birkhoff local donde la función f polinomial a trozos está definida por dos polinomios.*

Demostración: Primero, supongamos que la conjetura local de Pierce–Birkhoff se verifica para toda f polinomial a trozos, definida por dos polinomios. Sea g como en la conjetura de Separación. Demostraremos la Proposición por reducción al absurdo. Supongamos que α y β pertenecen a dos componentes conexas distintas de $\text{Sper } A \setminus \{g = 0\}$. Sea f la función polinomial a trozos que coincide con g sobre la componente conexa U de $\text{Sper } A \setminus \{g = 0\}$ que contiene α y $f = 0$ sobre $\text{Sper } A \setminus (\{g = 0\} \cup U)$. Gracias a la conjetura de Pierce–Birkhoff local tenemos $g - 0 = g \in \langle \alpha, \beta \rangle$, obteniendo la contradicción deseada.

Recíprocamente, supongamos que se verifica la conjetura de Separación. Sea f una función polinomial a trozos, definida por dos polinomios distintos, f_1 y f_2 . Sea $g = f_1 - f_2$. Si $(f_\alpha - f_\beta)(\alpha) = 0$ o $(f_\alpha - f_\beta)(\beta) = 0$, el resultado buscado es trivial. Por lo tanto, podemos suponer que $(f_\alpha - f_\beta)(\alpha)$ y $(f_\alpha - f_\beta)(\beta)$ son distintos de 0; en particular, f no puede ser representado por el mismo polinomio en α y en β . Asimismo, podemos suponer que $f_\alpha \neq f_\beta$. Entonces, intercambiando f_1 y f_2 si es necesario, podemos suponer que $f_\alpha = f_1$, $f_\beta = f_2$ y $f_\alpha - f_\beta = g$. Entonces α y β pertenecen a dos componentes conexas diferentes de $\text{Sper } A \setminus \{g = 0\}$, y por lo tanto $g = f_\alpha - f_\beta \in \langle \alpha, \beta \rangle$ por la conjetura de separación. Esto demuestra que f verifica la conclusión de la conjetura de Pierce–Birkhoff local. \square

Ahora podemos enunciar

Conjetura 7 (la conjetura de Conexidad) *Sean $\alpha, \beta \in \text{Sper } A$ y g_1, \dots, g_s una colección finita de elementos de $A \setminus \langle \alpha, \beta \rangle$. Entonces existe un conjunto conexo $C \subset \text{Sper } A$ tal que $\alpha, \beta \in C$ y $C \cap \{g_i = 0\} = \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$ (en otras palabras, α y β pertenecen a la misma componente conexa del conjunto $\text{Sper } A \setminus \{g_1 \dots g_s = 0\}$).*

Una ventaja de las conjeturas de Conexidad y de Separación es el hecho de ser afirmaciones sobre polinomios que son objetos menos misteriosos que funciones polinomiales a trozos.

En §11 reproducimos la demostración de [12] de que la conjetura de Conexidad implica la conjetura local de Pierce-Birkhoff. De este modo, reducimos la conjetura de Pierce-Birkhoff a la construcción, para cada par $\alpha, \beta \in \text{Sper } A$, un conjunto conexo en $\text{Sper } A$ con ciertas propiedades, las cuales precisaremos más adelante.

Más adelante describiremos, siguiendo [12], una clase de conjuntos conexos en $\text{Sper } A$ los cuales, aunque no sean suficientes para probar la conjetura de Pierce-Birkhoff local, constituyen el primero y el más sencillo ejemplo de conjuntos conexos más generales que necesitamos. Este caso particular representa el primer paso de nuestro programa para la demostración de la conjetura de Pierce-Birkhoff en dimensión mayor que 2. La relación exacta entre el teorema principal de conexidad [12] (Theorem 12.1) y la conjetura de Pierce-Birkhoff local, es decir, la parte del programa que hemos dejado para los artículos siguientes, está explicado con mas detalle al final de este artículo.

10. El caso de anillos más generales; anillos de Pierce–Birkhoff

La noción de espectro real permite generalizar la conjetura de Pierce–Birkhoff a otros anillos que no sean anillos de polinomios. Para esto, necesitamos definir el análogo de funciones polinomiales a trozos en este contexto más general. Sea B un anillo.

Definición 10.1 *Una función polinomial a trozos sobre $\text{Sper } B$ es una aplicación*

$$f : \text{Sper } B \rightarrow \coprod_{\alpha \in \text{Sper } B} B(\alpha)$$

tal que existe una descomposición $\text{Sper } A = \bigcup_{i=1}^r P_i$ en conjuntos constructibles, cerrados para la topología espectral, y elementos $f_i \in B$, $1 \leq i \leq r$, tales que para todo i , $1 \leq i \leq r$, y todo $\alpha \in P_i$, tenemos $f(\alpha) = f_i(\alpha)$.

Las funciones polinomiales por trozos forman un anillo dotado de las operaciones de máximo y mínimo. Denotaremos este anillo por $PW(B)$. Cada elemento de B induce de una manera evidente una función polinomial por trozos; esto define una inyección natural $B \hookrightarrow PW(B)$.

Definición 10.2 *El anillo B es de Pierce–Birkhoff si cada elemento de $PW(B)$ se puede obtener a partir de elementos de B iterando las operaciones de máximo y mínimo.*

Conjeturamos que todo anillo *regular* es de Pierce-Birkhoff.

Las distintas reformulaciones de la conjetura de Pierce–Birkhoff presentadas en este artículo son válidas en este contexto más general. Aunque los resultados de [12] son enunciados para anillos de polinomios sobre R , de hecho se generalizan al caso de anillos locales regulares cualesquiera. Explicaremos con detalle esta generalización en un artículo futuro. Existen contraejemplos fáciles para anillos no regulares:

Ejemplo 10.1. El anillo $B = \frac{\mathbb{R}[x,y]}{(y^2-x^3)}$ no es de Pierce–Birkhoff. En efecto, sea f la siguiente función polinomial por trozos:

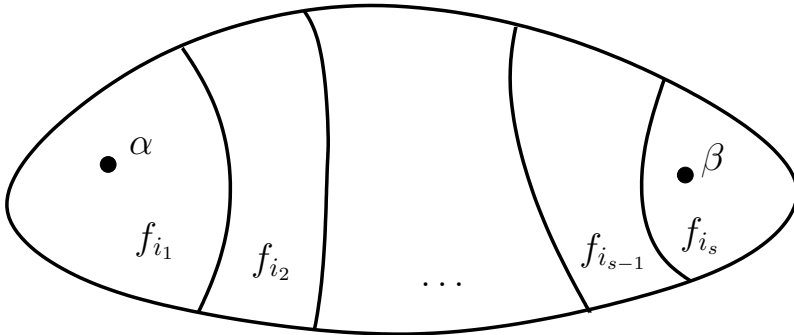
$$f(\alpha) = x(\alpha) \quad \text{si } y(\alpha) \geq 0 \tag{30}$$

$$= 0 \quad \text{si } y(\alpha) \leq 0. \tag{31}$$

Sea h un elemento de B tal que $h(\alpha) \geq x(\alpha)$ para todo α verificando $y(\alpha) \geq 0$. Entonces h tiene la forma $h = ax + g$, donde a es un número real estrictamente positivo y $g \in (y, x^2)B$. Obtenemos que existen puntos $\alpha \in \text{Sper } B$ tales que $y(\alpha) < 0$ y $h(\alpha) < 0$. Por lo tanto el anillo B y la función f no verifican la Conjetura 2 y B no es de Pierce–Birkhoff.

11. La conjetura de Conexidad implica la conjetura local de Pierce–Birkhoff.

Teorema 11.1 *La conjetura de Conexidad implica la conjetura local de Pierce–Birkhoff.*



Demostración: Daremos como cierta la conjetura de Conexidad y deduciremos la conjetura de Pierce–Birkhoff local (Conjetura 5). Sea $f \in PW(A)$. Denotaremos por $\{f_i\}_{1 \leq i \leq r}$ los elementos de A que representan a f en los diferentes subconjuntos constructibles $P_i \subset \text{Sper } A$. Sean $\alpha, \beta \in \text{Sper } A$ y sea

$$T = \{\{i, j\} \subset \{1, \dots, r\} \mid f_i - f_j \notin \langle \alpha, \beta \rangle\}. \tag{32}$$

Aplicaremos la conjetura de Conexidad a la colección finita $\{f_i - f_j \mid \{i, j\} \in T\}$ de elementos de A . Por la conjetura de Conexidad, existe un conjunto conexo $C \subset \text{Sper } A$ tal que $\alpha, \beta \in C$ y

$$C \cap \{f_i - f_j = 0\} = \emptyset \text{ para todo par } \{i, j\} \in T. \tag{33}$$

Sea $J \subset \{1, \dots, r\}$ el conjunto de índices j con la siguiente propiedad: existe $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, r\}$ tal que

$$f_\alpha = f_{i_1}, \tag{34}$$

$$j = i_s \tag{35}$$

y para cada $q \in \{1, \dots, s - 1\}$ tenemos

$$C \cap \{f_{i_q} - f_{i_{q+1}} = 0\} \neq \emptyset. \tag{36}$$

Sea $F = \bigcup_{j \in J} (P_j \cap C)$. Tenemos $\alpha \in F$ por definición.

Afirmación: $F = C$; en particular, $\beta \in F$.

Demostración de la Afirmación. Sean $J^c = \{1, \dots, r\} \setminus J$ y $G = \bigcup_{j \in J^c} (P_j \cap C)$.

Es evidente que

$$C = F \cup G \tag{37}$$

y que los dos conjuntos F y G son cerrados en la topología inducida sobre C (pues todos los P_j son cerrados). En seguida demostraremos que

$$F \cap G = \emptyset. \tag{38}$$

En efecto, si $\delta \in F \cap G$ entonces existe $j \in J$ y $j' \in J^c$ tales que $\delta \in P_j \cap P_{j'}$. Entonces $j(\delta) = f_{j'}(\delta)$ y $\delta \in C \cap \{f_j - f_{j'} = 0\}$, por lo tanto $j' \in J$, lo cual es una contradicción. Hemos demostrado (38), por lo tanto la unión en (37) es una unión disjunta.

Como C es conexa y $F \neq \emptyset$ (en efecto, tenemos $\alpha \in F$), la expresión (37) de C como una unión disjunta de conjuntos cerrados implica que $G = \emptyset$. Por lo tanto $\beta \in F$, lo cual termina la demostración de la Afirmación.

Sea $j \in J$ tal que $\beta \in P_j$, tenemos $f_j = f_\beta$. Sean i_1, \dots, i_s los índices de (34)–(36), los cuales expresan el hecho de que $j \in J$. Combinando (32), (33) y (36) obtenemos $f_{i_q} - f_{i_{q+1}} \in \langle \alpha, \beta \rangle$ para todos $q \in \{1, \dots, s - 1\}$. En vista de (34) y (35), obtenemos $f_\alpha - f_\beta \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Esto termina la demostración. \square

12. Un resumen de la demostración de la Conjetura de Conexidad cuando uno de los puntos α y β es monomial

En esta sección resumimos la demostración de la conjetura de Conexidad en el caso particular cuando uno de los α y β es monomial, dada en [12].

Notación: Para simplificar la notación, escribiremos x en vez de (x_1, \dots, x_n) .

Para un punto α del espectro real, sea Γ_α el grupo de valores ν_α . Decimos que α es **monomial** si todos los ν_α -ideales son ideales monomiales con respecto a x_1, \dots, x_n y

$$k_\alpha = R. \quad (39)$$

Sea $\alpha \in \text{Sper } A$. Para un elemento $a \in \Gamma_\alpha$, denotaremos por P_a el ν_α -ideal de valor a y por P_{a+} el mas grande ν_α -ideal estrictamente contenido en P_a . En otras palabras, tenemos

$$P_a = \{y \in A \mid \nu_\alpha(y) \geq a\}, \quad (40)$$

$$P_{a+} = \{y \in A \mid \nu_\alpha(y) > a\}. \quad (41)$$

Aplicando las ideas mencionadas antes, resumimos una demostración de la conjetura de Conexidad (y por lo tanto también de la conjetura de Pierce–Birkhoff local) en el caso particular donde para todo ν_α -ideal que contiene $\langle \alpha, \beta \rangle$ tenemos

$$\dim_R \frac{P_a}{P_{a+}} = 1 \quad (42)$$

(como un espacio R -vectorial) y P_a está generado por monomios en x . En particular, esto demuestra la conjetura de Conexidad y la conjetura local de Pierce–Birkhoff en el caso particular cuando uno de los α y β es un punto monomial del espectro real.

Daremos la demostración. Utilizaremos la notación del enunciado de la conjetura de Conexidad. Por hipótesis $g_i \notin \langle \alpha, \beta \rangle$, por lo tanto $\nu_\alpha(g_i) < \nu_\alpha(\langle \alpha, \beta \rangle)$. La hipótesis (42) y la monomialidad de P_a para $a < \nu_\alpha(\langle \alpha, \beta \rangle)$ implican que el espacio R -vectorial $\frac{P_a}{P_{a+}}$ está generado por la imagen natural de un monomio en x . Por lo tanto, para $1 \leq i \leq s$, g_i puede ser escrito como una suma de un monomio dominante $M(i)$, de valor $\nu_\alpha(g_i) < \nu_\alpha(\langle \alpha, \beta \rangle)$, más una combinación R -lineal de monomios con valores estrictamente superiores a $\nu_\alpha(g_i)$. Denotaremos $M(i)$ por $c_i x^{\gamma(i)}$, con $\gamma(i) \in \mathbb{N}^n$, $c_i \in R$, $c_i \neq 0$, y los monomios no dominantes que aparecen en g_i por $c_{ji} x^{\gamma_{ji}}$, $c_{ji} \in R$, $\gamma_{ji} \in \mathbb{N}^n$, $1 \leq j \leq N_i$:

$$g_i = c_i x^{\gamma(i)} + \sum_{j=1}^{N_i} c_{ji} x^{\gamma_{ji}},$$

donde

$$\nu_\alpha(x^{\gamma(i)}) < \nu_\alpha(x^{\gamma_{ji}}), \quad 1 \leq j \leq N_i. \quad (43)$$

Ahora, la Proposición 7.1 (2) junto con el hecho de que $\nu_\alpha(x^{\gamma(i)}) < \nu_\alpha(\langle \alpha, \beta \rangle)$ implican que

$$\nu_\beta(x^{\gamma(i)}) < \nu_\beta(x^{\gamma_{ji}}), \quad 1 \leq j \leq N_i. \quad (44)$$

Por definición de $\langle \alpha, \beta \rangle$, si $x_q \notin \langle \alpha, \beta \rangle$ entonces el signo de $x_q(\alpha)$ es el mismo que el de $x_q(\beta)$. Las desigualdades (13), (43) y (44) implican que

$$\left| x^{\gamma(i)}(\alpha) \right| \geq N |x^{\gamma_{ji}}(\alpha)| \quad \text{para todo } N \in R \text{ y } 1 \leq j \leq N_i; \quad (45)$$

las mismas desigualdades se verifican con α reemplazado por β . Sea C el conjunto de todos los puntos $\delta \in \text{Sper } A$ tales que

$$\left| c_i x^{\gamma^{(i)}}(\delta) \right| \geq N_i |c_{j_i} x^{\gamma_{j_i}}(\delta)| \quad \text{para } 1 \leq j \leq N_i, \quad (46)$$

y $x_q(\delta)$ tiene el mismo signo que $x_q(\alpha)$ para todo q tal que $x_q \notin \langle \alpha, \beta \rangle$. Entonces $\alpha, \beta \in C$ y todos los g_i conservan signo constante sobre C , $1 \leq i \leq s$ (la presencia del coeficiente N_i en las desigualdades (46) asegura que el monomio dominante de cada g_i es superior en valor absoluto a la suma de todos los demás monomios). En [12] dimos una demostración elemental del siguiente hecho:

Lema 12.1 *Sea $l \in \{0, \dots, n\}$. Sea C el subconjunto de $\text{Sper } A$ definido especificando unos valores fijos de $\text{sgn } x_q$ (cada uno de los cuales podría ser estrictamente positivo sobre todo C o estrictamente negativo sobre todo C) para $q \in \{1, \dots, l\}$ e imponiendo, además, un número finito de desigualdades monomiales de la forma*

$$|d_i x^{\lambda_i}| \geq |x^{\theta_i}|, \quad 1 \leq i \leq M \quad (47)$$

donde $d_i \in R \setminus \{0\}$, $\lambda_i, \theta_i \in \mathbb{N}^n$ y x_q aparecen solo en el lado derecho de las desigualdades (47) para $q \in \{l+1, \dots, n\}$. Entonces C es conexo.

La demostración del Lema 12.1 se basa sobre los siguientes resultados de comparación de la conexidad en el espectro real y la conexidad semi-algebraica de subconjuntos semi-algebraicos de R^n .

Recordemos la Definición 2.4.2 y la Proposición 7.5.1 de [5] (p. 31 y p. 130, respectivamente):

Definición 12.1 *Sea S un subconjunto semi-algebraico de R^n . El conjunto S se dice **semi-algebraicamente conexo** si para toda descomposición $S = S_1 \amalg S_2$, con S_1, S_2 semi-algebraicos y relativamente cerrados en S para la topología euclidiana, tenemos $S_1 = S$ o $S_2 = S$.*

Proposición 12.1 *Un conjunto semi-algebraico S en R^n es semi-algebraicamente conexo si y solo si \tilde{S} es conexo en la topología espectral. Si S_1, \dots, S_k son las componentes semi-algebraicamente conexas de S , entonces $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_k$ son las componentes conexas de \tilde{S} .*

Aviso: La noción de conexidad semi-algebraica coincide con la noción de la conexidad habitual si $R = \mathbb{R}$, pero no en general. Para un cuerpo real cerrado arbitrario R , la conexidad habitual en la topología euclideana es una noción muy restrictiva que no sera utilizada en este artículo ni tampoco en ningún otro.

Otro conjunto conexo C que podríamos haber utilizado de manera semejante es el conjunto de todos los δ tales que las desigualdades (43) se verifican con α reemplazado por δ y $x_q(\delta)$ tiene el mismo signo que $x_q(\alpha)$ para todo q tal que $x_q \notin \langle \alpha, \beta \rangle$. La conexidad de tal conjunto C es un Corolario inmediato del principal teorema de conexidad [12] — Teorema 12.1, enunciado más adelante.

Otro ingrediente importante utilizado en [12] para demostrar el teorema de conexidad son unos resultados conocidos sobre resolución de singularidades, de naturaleza puramente combinatoria. Estos resultados pueden ser considerados como un caso particular de la desingularización de variedades tóricas o juego de Hironaka [25].

Mas precisamente, lo que se utiliza es un caso particular del juego de Hironaka: un algoritmo para resolver singularidades de un binomio cualquiera iterando explosiones combinatorias (tóricas) con centros no singulares.

El teorema principal de [12] es el siguiente teorema de conexidad:

Teorema 12.1 Sean $\omega_{ij}, \theta_{il} \in \mathbb{Q}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, q\}, l \in \{1, \dots, u\}$, donde q y u son números enteros positivos. Para un punto $\delta \in \text{Sper}(A)$, denotaremos por ν_δ la valoración asociada a δ . El conjunto

$$S = \left\{ \delta \in \text{Sper}(A) \mid x_i(\delta) > 0, i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \omega_{ij} \nu_\delta(x_i) > 0, j \in \{1, \dots, q\}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \theta_{il} \nu_\delta(x_i) = 0, l \in \{1, \dots, u\} \right\} \quad (48)$$

es conexo en la topología espectral.

En otras palabras, subconjuntos de $\text{Sper } A$ definidos por un número finito de ecuaciones \mathbb{Q} -lineales y desigualdades \mathbb{Q} -lineales estrictas en $\nu_\delta(x_1), \dots, \nu_\delta(x_n)$ son conexas.

De paso, exhibimos en [12] otros dos tipos de conjuntos conexos en $\text{Sper } A$, cuya conexidad creemos interesante por sí misma.

En el artículo [13] desarrollamos la teoría de **raíces aproximadas** de una valoración. Dada una valoración ν , no negativa sobre A , una familia de raíces aproximadas es una colección $\{Q_i\}$, finita o numerable, de elementos de A , con ciertas propiedades adicionales que explicaremos en seguida. Un **monomio generalizado** (con respecto a una colección dada $\{Q_i\}$ de raíces aproximadas) es, por definición, un elemento de A de la forma $\prod_j Q_j^{\gamma_j}$, $\gamma_j \in \mathbb{N}$. Las propiedades principales que definen las raíces aproximadas son el hecho que todo ν -ideal I de A está generado por los monomios generalizados contenidos en él, es decir, monomios generalizados $\prod_j Q_j^{\gamma_j}$ que verifican

$$\sum_j \gamma_j \nu(Q_j) \geq \nu(I),$$

y el hecho de que para todo i , Q_i está descrito por una formula explícita en términos de Q_1, \dots, Q_{i-1} . En particular, la valoración ν está completamente determinada por el conjunto $\{Q_i\}$ y los valores $\nu(Q_i)$.

Después mostramos que todo elemento $g \in A$ puede ser escrito como una suma finita de la forma

$$g = c\mathbf{Q}^\theta + \sum_{j=1}^N c_j \mathbf{Q}^{\delta_j}, \tag{49}$$

donde c y c_j son elementos de A tales que $\nu(c) = \nu(c_j) = 0$ y \mathbf{Q}^θ y \mathbf{Q}^{δ_j} son monomios generalizados tales que

$$\nu(\mathbf{Q}^\theta) < \nu(\mathbf{Q}^{\delta_j}) \text{ para } 1 \leq j \leq N. \tag{50}$$

Ahora sean $\delta \in \text{Sper}(A)$ y $\nu = \nu_\delta$. Gracias a (13) y (50) el signo de g con respecto a \leq_δ está determinado por el signo de su coeficiente dominante c .

Sean α y β dos puntos de $\text{Sper}(A)$ que poseen una especialización común. En [13] damos una descripción explícita del conjunto de monomios generalizados (con respecto a las raíces aproximadas Q_i comunes a ν_α y ν_β) los cuales generan el ideal separante $\langle \alpha, \beta \rangle$. Además, demostramos que todas las raíces aproximadas Q_i para ν_α tales que $Q_i \notin \langle \alpha, \beta \rangle$ también son raíces aproximadas para ν_β y viceversa.

Ahora tomemos g como en la conjetura de separación. El hecho de que $g \notin \langle \alpha, \beta \rangle$ implica la existencia de una expresión (49) donde todas las raíces aproximadas Q_i son comunes para ν_α y ν_β y las desigualdades (50) se verifican a la vez para $\nu = \nu_\alpha$ y para $\nu = \nu_\beta$. Las desigualdades (50) pueden ser consideradas como desigualdades lineales sobre $\nu(Q_1), \dots, \nu(Q_t)$ con coeficientes enteros.

Para probar la conjetura de separación, buscamos conjuntos conexos $C \subset \text{Sper}(A)$ con las propiedades siguientes:

- (1) $\alpha, \beta \in C$;
- (2) las Q_i que aparecen en (49) son las raíces aproximadas a la vez para todos los ν_δ , $\delta \in C$;
- (3) las desigualdades (50) son válidas para $\nu = \nu_\delta$, para todo $\delta \in C$;
- (4) el coeficiente dominante c tiene signo constante sobre C .

Una vez encontrado dicho C , (13) y (50) implican que el signo de g en C es constante, lo que demuestra que α y β están en la misma componente conexa de $\text{Sper}(A) \setminus \{g = 0\}$.

En [13] definimos el conjunto

$$C(g, \alpha, \beta) = \left\{ \delta \in \text{Sper}(A) \mid \begin{aligned} &Q_i(\delta) > 0, \quad i \in \{1, \dots, t\}, \\ &\sum_{i=1}^t \omega_{ij} \nu_\delta(Q_i) > 0, \quad j \in \{1, \dots, q\}, \sum_{i=1}^t \lambda_{ij} \nu_\delta(Q_i) = 0, \quad j \in \{1, \dots, l\} \end{aligned} \right\}, \tag{51}$$

donde $\omega_{ij}, \lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$, todas las desigualdades (50) antes descritas aparecen entre $\sum_{i=1}^t \omega_{ij} \nu_\delta(Q_i) > 0$ y las restantes igualdades y desigualdades en el lado derecho de (51) codifican el hecho que Q_1, \dots, Q_t son raíces aproximadas para ν_δ para todo

δ perteneciente a $C(g, \alpha, \beta)$. Si g_1, \dots, g_s es una colección finita de elementos de $A \setminus \langle \alpha, \beta \rangle$, sea

$$C(g_1, \dots, g_s, \alpha, \beta) = \bigcap_{i=1}^s C(g_i, \alpha, \beta).$$

Por construcción, ambos conjuntos $C(g, \alpha, \beta)$ y $C(g_1, \dots, g_s, \alpha, \beta)$ contienen a α y β , el elemento g no cambia de signo en $C(g, \alpha, \beta)$ y ninguno de los elementos g_1, \dots, g_s cambia de signo en $C(g_1, \dots, g_s, \alpha, \beta)$. Por tanto, para probar la conjetura de separación basta probar que $C(g, \alpha, \beta)$ es conexo, y para probar la conjetura de Pierce–Birkhoff local basta demostrar que $C(g_1, \dots, g_s, \alpha, \beta)$ es conexo.

La demostración de la conexidad de $C(g, \alpha, \beta)$ y $C(g_1, \dots, g_s, \alpha, \beta)$ se deja para próximos artículos. En cualquier caso, la parte más delicada de la prueba de la conjetura de separación (resp. de Pierce–Birkhoff local) es probar la conexidad de $C(g, \alpha, \beta)$ (resp. $C(g_1, \dots, g_s, \alpha, \beta)$). El teorema de conexidad de [12] es el caso especial del resultado deseado en el que el conjunto finito $\{Q_1, \dots, Q_t\}$ es un subconjunto del conjunto de variables $\{x_1, \dots, x_n\}$. En [15] planeamos reducir la conexidad de $C(g, \alpha, \beta)$ a este caso especial usando sucesiones de explosiones de la forma descrita en [12]: construiremos una sucesión π de explosiones tal que el transformado total de cada Q_i , $i \in \{1, \dots, t\}$, es un monomio usual con respecto a las nuevas coordenadas por una unidad. La preimagen de $C(g, \alpha, \beta)$ por π tiene la forma (48) en las nuevas coordenadas. Esto reducirá la conexidad de $C(g, \alpha, \beta)$ a la de los conjuntos de la forma S , demostrada en [12].

Referencias

- [1] D. Alvis, B. Johnston, J.J. Madden, *Local structure of the real spectrum of a surface, infinitely near points and separating ideals*, J. Reine Angew. Math. 167, 160-196 (1931).
- [2] C. Andradas, L. Bröcker, J.M. Ruiz, *Constructible Sets in Real Geometry*. Springer–Verlag—Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [3] R. Baer, *Über nicht-archimedisch geordnete Körper* (Beitrage zur Algebra). Sitz. Ber. Der Heidelberger Akademie, 8 Abhandl. (1927).
- [4] G. Birkhoff and R. Pierce, *Lattice-ordered rings*. Annales Acad. Brasil Ciênc. 28, 41–69 (1956).
- [5] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*. Springer–Verlag, Berlin 1987.
- [6] C. N. Delzell, *On the Pierce–Birkhoff conjecture over ordered fields*, Rocky Mountain J. Math. 19 (1989), no. 3, 651–668.

- [7] L. Fuchs, *Telweise geordnete algebraische Strukturen*. Vandenhoeck and Ruprecht, 1966.
- [8] M. Henriksen and J. Isbell, *Lattice-ordered rings and function rings*. Pacific J. Math. 11, 533–566 (1962).
- [9] I. Kaplansky, *Maximal fields with valuations I*. Duke Math. J., 9:303–321 (1942).
- [10] I. Kaplansky, *Maximal fields with valuations II*. Duke Math. J., 12:243–248 (1945).
- [11] W. Krull, Allgemeine Bewertungstheorie, J. Reine Angew. Math. 167, 160–196 (1932).
- [12] F. Lucas, J. J. Madden, D. Schaub, M. Spivakovsky, *On connectedness of sets in the real spectra of polynomial rings*, Manuscripta Mathematica, Volume 128, Number 4, April 2009, pp. 505–547 (published on line December 20, 2008), arXiv:math/0601671
- [13] F. Lucas, J. J. Madden, D. Schaub, M. Spivakovsky, *Approximate roots of a valuation and the Pierce–Birkhoff conjecture*, enviado a publicación, arXiv:1003.1188.
- [14] F. Lucas, J. J. Madden, D. Schaub, M. Spivakovsky *On points at infinity of real spectra of polynomial rings*, Mich. Math. J., Vol. 57 (Special volume in honor of Mel Hochster’s sixty-fifth birthday), pp. 587–599, August 2008., arXiv:0707.2327
- [15] F. Lucas, D. Schaub, M. Spivakovsky, *On the Pierce–Birkhoff conjecture*, in preparation.
- [16] J. J. Madden, *Pierce–Birkhoff rings*. Arch. Math. 53, 565–570 (1989).
- [17] J. J. Madden, *The Pierce–Birkhoff conjecture for surfaces*, unpublished preprint.
- [18] L. Mahé, *On the Pierce–Birkhoff conjecture*. Rocky Mountain J. Math. 14, 983–985 (1984).
- [19] L. Mahé, *On the Pierce–Birkhoff conjecture in three variables*. J. of Pure and Applied Algebra 211, 459–470 (2007).
- [20] M. Marshall *The Pierce–Birkhoff conjecture for curves*. Can. J. Math. 44, 1262–1271 (1992).
- [21] A. Prestel, *Lectures on formally real fields*, Lecture Notes in Math., Springer–Verlag—Berlin, Heidelberg, New York, 1984.
- [22] A. Prestel, C.N. Delzell, *Positive Polynomials*, Springer monographs in mathematics, 2001.

- [23] S. Priess-Crampe, *Angeordnete Strukturen: Gruppen, Orper, projektive Ebenen*, Springer-Verlag—Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- [24] N. Schwartz, *Real closed spaces*. Habilitationsschrift, München 1984.
- [25] M. Spivakovsky, *A solution to Hironaka's polyhedra game*. Arithmetic and Geometry, Vol II, Papers dedicated to I. R. Shafarevich on the occasion of his sixtieth birthday, M. Artin and J. Tate, editors, Birkhäuser, 1983, pp. 419–432.
- [26] O. Zariski, P. Samuel, Springer-Verlag—Berlin, Heidelberg, New York, 1960

F. Lucas: Département de Mathématiques, Université d'Angers, 2 bd Lavoisier, 49045 Angers Cedex, France.

J. J. Madden: Department of Mathematics, Louisiana State University at Baton Rouge, Baton Rouge, LA, USA.

D. Schaub: Département de Mathématiques, Université d'Angers, 2 bd Lavoisier, 49045 Angers Cedex, France.

M. Spivakovsky: Institut de Mathématiques de Toulouse y CNRS, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 9, France.