Rev. Semin. Iberoam. Mat. **4** fasc. I (2010) 37–49

SOBRE FEIXES LINEARES DE FOLHEAÇÕES EM $\mathbb{P}^n$

ROGÉRIO S. MOL

RESUMO. Estudamos folheações holomorfas singulares em $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, de codimensão dois que deixam invariantes folheações de codimensão um. Consideramos especialmente o caso em que as folheações de codimensão um invariante estão em um feixe linear. Estudamos ainda feixes lineares de folheações definidas por 1-formas fechadas com curvatura nula.

RESUMEN. Estudiamos foliaciones holomorfas singulares en $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, de codimensión dos que dejan invariantes a foliaciones de codimensión uno. Consideramos especialmente el caso en que las foliaciones de codimensión uno están en un haz lineal. Estudiamos por fin haces lineales de foliaciones definidas por 1-formas cerradas con curvatura nula.

1. INTRODUÇÃO

Nesse trabalho estudaremos folheações holomorfas singulares no espaço projetivo $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Um tal objeto, a partir de agora referido apenas pelo termo *folheação*, é definido com sendo uma folheação holomorfa regular de dimensão k fora de um conjunto analítico de codimensão pelo menos dois, seu *conjunto singular*. Se $\mathcal{F}$ denota a folheação, então seu conjunto singular é denotado por $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Observamos que, como o ambiente é $\mathbb{P}^n$, o conjunto $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ é algébrico. O *grau* de $\mathcal{F}$ é definido como o número de tangências, com multiplicidades contadas, de $\mathcal{F}$ com um $(n-k)$-plano genérico de $\mathbb{P}^n$.

Alguns problemas clássicos em teoria de folheações projetivas dizem respeito ao estudo de folheações em $\mathbb{P}^n$ que deixam variedades algébricas invariantes. Citamos, em particular, o problemas de Jouanolou, que diz respeito às propriedades de genericidade das folheações sem variedade algébrica invariante (veja [8], [10], [13], [9] e [5]), e o problema de Poincaré, que trata da possibilidade de obter uma quota do grau de uma variedade algébrica invariante em termos do grau da folheação (veja [3], [1] e [14]). Nesse texto, propomos estudar folheações em $\mathbb{P}^n$ que têm como "objeto algébrico" invariante uma folheação de dimensão mais alta. Iniciamos com a definição:

Definição 1.1. Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ folheações em $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, de dimensões i e j, respectivamente, onde $1 \leq i < j \leq n-1$. Dizemos que $\mathcal{F}$ *deixa* $\mathcal{G}$ *invariante*, ou, alternativamente, que $\mathcal{G}$ *é invariante por* $\mathcal{F}$ se, para todo $x \in \mathbb{P}^n \setminus (\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{G}))$, vale a inclusão de espaços tangentes $T_x\mathcal{F} \subset T_x\mathcal{G}$.

[1]Trabalho financiado parcialmente por Pronex/FAPERJ e FAPEMIG

A propriedade da definição equivale a pedir que, para cada $x \in \mathbb{P}^n$ fora de $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$, a folha de $\mathcal{F}$ passando por x esteja contida na folha de $\mathcal{G}$ passando por x. Evidentemente, a noção aí estabelecida se aplica a qualquer espaço ambiente, não necessariamente $\mathbb{P}^n$, e tem também sua versão local.

Em um trabalho anterior (veja [12]), configurações como a da definição são estudadas e são estabelecidos resultados na direção do problema de Jouanolou e do problema de Poincaré para folheações que deixam folheações invariantes. No texto a seguir, nosso foco serão as folheações de codimensão dois em $\mathbb{P}^n$ que deixam folheações de codimensão um invariantes. Recordamos que em $\mathbb{P}^n$, com coordenadas homogêneas $X = (X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$, uma folheação de codimensão um e grau d é induzida por uma 1-forma $\omega = \sum_{i=0}^{n} A_i(X) dX_i$, onde cada A_i é um polinômio homogêneo de grau $d+1$, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $\omega \wedge d\omega = 0$ (integrabilidade);

(ii) $i_{\mathbf{r}}\omega = \sum_{i=0}^{n} X_i A_i(X) = 0$, onde $\mathbf{r} = X_0 \partial/\partial X_0 + \cdots X_n \partial/\partial X_n$ é o campo de vetores radial (condição de Euler);

(iii) $\mathrm{codim}\,\mathrm{Sing}(\omega) \geq 2$,

onde $\mathrm{Sing}(\omega) = \{A_0 = A_1 = \cdots = A_n = 0\}$ é o conjunto singular de ω, que será também o conjunto singular da folheação.
Esse é o teorema de Chow para folheações. O espaço das folheações de grau d em $\mathbb{P}^n$ será denotado por $\mathcal{F}ol_n(d)$. Para parametrizar esse espaço, tomamos $\mathbb{P}^N$, onde $N = (n+1)\binom{n+d+2}{n+1} - 1$, como a projetivização do espaço de 1-formas polinomiais em $\mathbb{C}^{n+1}$ cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau $d+1$. Na topologia de Zariski, $\mathcal{F}ol_n(d)$ é um subconjunto aberto da subvariedade algébrica de $\mathbb{P}^N$ definida pelas condições impostas por (i) e (ii). Os elementos na fronteira $\partial\mathcal{F}ol_n(d)$ são 1-formas polinomiais integráveis satisfazendo a condição de Euler, mas possuindo conjunto singular de codimensão um. Elas correspondem, através do cancelamento da componente de codimensão um do conjunto singular, a folheações de grau estritamente menor que d.

Um *feixe linear* de folheações de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^n$ é definido como sendo uma reta no fecho $\overline{\mathcal{F}ol_n(d)}$ cujo elemento genérico está em $\mathcal{F}ol_n(d)$. Esses objetos foram estudados por D. Cerveau em [2], onde ele mostra que uma folheação que é elemento genérico de um feixe linear de folheações em $\mathbb{P}^3$ satisfaz a conjectura de M. Brunella, ou seja, ou ela possui uma superfície invariante, ou ela é invariante por uma folheação por curvas algébricas. O trabalho de D. Cerveau é a inspiração principal para essas notas e alicerce para alguns dos resultados aqui apresentados. Faremos, na seção 3, algumas considerações sobre folheações de codimensão dois em $\mathbb{P}^n$ que deixam invariantes um feixe linear de folheações de codimensão um e, na seção 4, obteremos um resultado de classificação de feixes lineares gerados por folheações definidas por 1-formas fechadas com curvatura nula.

Gostaria de agradecer à Universidad de Valladolid pela hospitalidade durante minha visita, em abril de 2010, quando essas notas começaram a ser escritas, e a Felipe Cano Torres, pelas proveitosas discussões matemáticas.

2. Invariância do conjunto singular

Iniciamos por provar o seguinte fato:

Proposição 2.1. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ folheações holomorfas de dimensão um e codimensão um, respectivamente, definidas num aberto $U \subset \mathbb{C}^n$. Suponha que $\mathcal{G}$ seja invariante por $\mathcal{F}$. Então* $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ *é invariante por $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Seja x um ponto regular de $\mathcal{F}$ pertencente a $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$. Fixe $(z_1, \ldots, z_n)$ um sistema de coordenadas locais tal que $x = (0, \ldots, 0)$ e para o qual $\mathcal{F}$ tem folhas verticais, ou seja, $\mathcal{F}$ é induzida pelo campo local $\mathbf{v} = \partial/\partial z_n$. Tome $\omega = Q_1 dz_1 + \cdots + Q_n dz_n$ uma 1-forma integrável que induz $\mathcal{G}$ em torno de x. Temos

$$i_{\mathbf{v}}\omega \;=\; Q_n \;\equiv\; 0.$$

A condição de integrabilidade de ω nos dá

$$\begin{aligned} 0 \;=\; d\omega \wedge \omega \;&=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial Q_j}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_j \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{n-1} Q_k dz_k \right) \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge \left(\sum_{1 \le j < k \le n-1} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial z_i} Q_k - \frac{\partial Q_k}{\partial z_i} Q_j \right) dz_j \wedge dz_k \right) \end{aligned}$$

Fixando $i = n$, temos

$$\frac{\partial Q_j}{\partial z_n} Q_k - \frac{\partial Q_k}{\partial z_n} Q_j \;=\; 0 \qquad \forall\, 1 \le j < k < n$$

Mostraremos que isso implica que $\partial Q_j/\partial z_n = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Vamos provar tal fato para $j = 1$. Podemos supor que $Q_1 \neq 0$, pois caso contrário não há nada a fazer. Seja φ um fator irredutível do germe de Q_1 em x. Afirmamos que existe k na lista $2, \ldots, n-1$ tal que φ não é fator irredutível do germe de Q_k em p. De fato, se isso não fosse verdade, φ seria um fator comum de $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$, o que resultaria numa componente de codimensão um em $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$. Seja s a multiplicidade de φ como fator de Q_1. Escrevemos $Q_1 = \varphi^s \tilde{Q}_1$, onde φ não divide $\tilde{Q}_1$. Derivando com respeito a z_n:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z_n} \;=\; s\varphi^{s-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \tilde{Q}_1 + \varphi^s \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial z_n}.$$

Isso mais a equação

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z_n} Q_k = \frac{\partial Q_k}{\partial z_n} Q_1$$

implica que φ divide $\partial\varphi/\partial z_n$, o que por sua vez resulta em $\partial\varphi/\partial z_n = 0$. Assim, todo fator irredutível φ de Q_1 é tal que $\partial\varphi/\partial z_n = 0$, de onde concluímos que $\partial Q_1/\partial z_n = 0$.

Assim, as funções $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ dependem apenas de $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Como essas funções se anulam em $x = (0, \ldots, 0)$, concluímos que o eixo z_n, que é $\mathcal{F}$-invariante, está contido no conjunto singular de $\mathcal{G}$. □

Como consequência do resultado acima, temos

Corolário 2.2. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de dimensão k e $\mathcal{G}$ folheação holomorfa de codimensão um, ambas definidas num aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, onde $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq n-2$. Suponha que $\mathcal{G}$ seja invariante por $\mathcal{F}$. Então* $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ *é invariante por $\mathcal{F}$.*

Demonstração. De fato, como consequência da proposição, qualquer campo de vetores holomorfo local tangente a $\mathcal{F}$ também será tangente a $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$. □

Um germe de folheação de codimensão um cujo conjunto singular tem codimensão maior que dois é caracterizado pelo teorema de Malgrange ([11]):

Teorema 2.3. *Seja $\mathcal{G}$ um germe de folheação de codimensão um em $(\mathbb{C}^n, 0)$, $n \geq 3$, induzida por um germe de 1-forma holomorfa integrável ω. Se o conjunto singular de $\mathcal{G}$ tem codimensão maior que dois, então $\mathcal{G}$ possui integral primeira holomorfa, ou seja, existem germes de funções holomorfas f e g em $(\mathbb{C}^n, 0)$, com $f(0) \neq 0$, tais que $\omega = f dg$.*

O teorema de Malgrange nos permite demonstrar:

Proposição 2.4. *Seja $\mathcal{G}$ uma folheação holomorfa de codimensão um em $\mathbb{P}^n$. Então Sing($\mathcal{G}$) possui uma componente de codimensão dois.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ tenha codimensão maior que dois. Levantando $\mathcal{G}$ para $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, obtemos uma folheação de codimensão um $\tilde{\mathcal{G}}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ induzida por uma forma polinomial integrável ω, com coeficientes homogêneos, satisfazendo (i), (ii) e (iii) acima. Temos que $\mathrm{Sing}(\tilde{\mathcal{G}}) = \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) \cup \{0\}$. Portanto, $\mathrm{Sing}(\tilde{\mathcal{G}})$ tem codimensão maior que dois em $\mathbb{C}^{n+1}$. O teorema de Malgrange nos diz então que o germe de $\tilde{\mathcal{G}}$ em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ possui uma integral primeira holomorfa local. Isso porém é incompatível com relação de Euler (ii), ou seja, com o fato geométrico de que as retas por $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ estão contidas nas folhas de $\mathcal{G}$ e, portanto, também nos níveis de sua integral primeira. □

Juntando as informações do corolário 2.2 e da proposição 2.4, concluímos o seguinte:

Corolário 2.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão k em $\mathbb{P}^n$, onde $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq n-2$. Se $\mathcal{F}$ deixa invariante uma folheação $\mathcal{G}$ de codimensão um então existe uma variedade algébrica $S \subset \mathbb{P}^n$ de codimensão dois tal que, ou $S \subset$ Sing($\mathcal{F}$), ou então S é invariante por $\mathcal{F}$.*

3. Feixes lineares de folheações

Sejam $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ duas folheações em $\mathbb{P}^n$ de mesmo grau d induzidas, em coordenadas homogêneas, por 1-formas polinomiais homogêneas integráveis ω_1 e ω_2. O conjunto de zeros da 2-forma $\omega_1 \wedge \omega_2$, que corresponde ao conjunto de tangências de $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, pode conter uma componente de codimensão um. Se $f = 0$ é uma equação polinomial para essa componente, escrevemos $\omega_1 \wedge \omega_2 = f\theta$, onde θ é uma 2-forma cujos coeficientes são polinômios homogêneos e cujo conjunto singular tem codimensão pelo menos dois. A distribuição de $(n-1)$-planos em

$\mathbb{C}^{n+1}$ definida por θ desce a uma distribuição integrável de $(n-2)$-planos em $\mathbb{P}^n$ cujo conjunto singular tem codimensão pelo menos dois. Essa distribuição define uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão dois em $\mathbb{P}^n$ que deixa invariantes $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$. Seguindo a terminologia introduzida por E. Ghys em [6], $\mathcal{F}$ é chamada de *eixo* de $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$.

Voltemos ao $\mathbb{P}^N$ que parametriza $\mathcal{F}ol_n(d)$ e à noção de feixe linear de folheações. Temos que duas folheações em $\mathcal{F}ol_n(d)$ definidas por 1-formas ω_1 e ω_2 definem um feixe linear de folheações se, e somente se, $\omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ é integrável para todo $t = (t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^1$. Isto significa que

$$\begin{aligned} 0 = \omega \wedge d\omega &= (t_1\omega_1 + t_2\omega_2) \wedge (t_1 d\omega_1 + t_2 d\omega_2) \\ &= t_1 t_2(\omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1), \end{aligned}$$

que, por sua vez, equivale a

$$\omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 = 0. \tag{1}$$

Um único valor $t = (t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^1$ para o qual $t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ é integrável é suficiente para fazer valer a condição (1). Logo, se três folheações estão em uma reta, então elas estão em um feixe linear de folheações. Isso segue diretamente do fato de que a condição de integrabilidade se traduz em um conjunto de equações quadráticas em $\mathbb{P}^N$.

Observamos que, se ω é uma 1-forma holomorfa polinomial homogênea em $\mathbb{C}^{n+1}$, então existe uma 1-forma racional homogênea α de grau -1 tal que $d\omega = \alpha \wedge \omega$. De fato, basta tomar um campo de vetores $\mathbf{v}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ cujos coeficientes são funções racionais homogêneas tal que $i_{\mathbf{v}}\omega = 1$. Por exemplo, se $\omega = \sum_{i=0}^{n} A_i(X)dX_i$ com $A_0 \neq 0$, basta tomar $\mathbf{v} = (1/A_0)\partial/\partial X_0$. Contraindo por $\mathbf{v}$ em ambos os lados de $\omega \wedge d\omega = 0$, obtemos

$$0 = i_{\mathbf{v}}(\omega \wedge d\omega) = (i_{\mathbf{v}}\omega)d\omega - \omega \wedge i_{\mathbf{v}}d\omega,$$

donde

$$d\omega = -(i_{\mathbf{v}}d\omega) \wedge \omega.$$

A 1-forma $\alpha = -i_{\mathbf{v}}d\omega$ resolve o problema. A construção de α é a primeira etapa no algoritmo de Godbillon-Vey.

Vamos a seguir explicar o conceito de curvatura de um feixe linear de folheações. Em primeiro lugar, temos:

Proposição 3.1. *Sejam ω_1 e ω_2 duas 1-formas polinomiais de grau $d+1$ satisfazendo (i), (ii) e (iii). Então ω_1 e ω_2 geram um feixe linear de folheações se, e somente se, existe uma 1-forma racional homogênea θ, de grau -1, tal que $d\omega_1 = \theta \wedge \omega_1$ e $d\omega_2 = \theta \wedge \omega_2$.*

Demonstração. Essa condição é suficiente em vista de (1). Para a necessidade, tomamos 1-formas racionais homogêneas α_1 e α_2 tais que

$$d\omega_1 = \alpha_1 \wedge \omega_1 \quad \text{e} \quad d\omega_2 = \alpha_2 \wedge \omega_2$$

Temos

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 \\ &= \omega_1 \wedge \alpha_2 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \alpha_1 \wedge \omega_1 \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1) \wedge \omega_2 \wedge \omega_1. \end{aligned}$$

Assim, existem funções racionais homogêneas Φ_1 e Φ_2 tais que

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \Phi_1\omega_1 - \Phi_2\omega_2.$$

A 1-forma θ definida por $\theta = \alpha_1 + \Phi_1\omega_1 = \alpha_2 + \Phi_2\omega_2$ satisfaz as condições do enunciado. □

A 1-forma θ que acabamos de construir é unicamente determinada. Com efeito, se duas 1-formas θ_1 e θ_2 satisfazem a propriedade da proposição, teríamos $d\omega = \theta_1 \wedge \omega = \theta_2 \wedge \omega$, donde $(\theta_1 - \theta_2) \wedge \omega = 0$ para toda 1-forma ω no feixe linear. Isso só é possível se $\theta_1 = \theta_2$. Definimos, então, a *curvatura* do feixe linear com sendo $d\theta$. Observe que $d\theta$, se não nula, é uma 2-forma racional homogênea de grau -2.

A conjectura de M. Brunella afirma que uma folheação $\mathcal{G}$ de codimensão um $\mathbb{P}^3$ satisfaz uma das alternativas:

(a) $\mathcal{G}$ possui uma superfície algébrica invariante;

(b) $\mathcal{G}$ é invariante por uma folheação $\mathcal{F}$ por curvas algébricas.

Dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ é por curvas algébricas se o fecho de cada folha de $\mathcal{F}$ for uma curva algébrica. Por um trabalho de X. Gómez-Mont (veja [7]), isso equivale a dizer que $\mathcal{F}$ possui duas integrais primeiras racionais independentes. Em [2], o seguinte resultado foi provado por D. Cerveau:

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{G}$ uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{P}^3$ pertencente a um feixe linear de folheações. Então $\mathcal{G}$ satisfaz a conjectura de Brunella.*

A folheação $\mathcal{F}$ que aparece na alternativa (b) do teorema é o eixo do feixe linear. Vale observar que a demonstração apresentada por D. Cerveau em nenhum momento utiliza o fato de que o espaço ambiente tem dimensão três. A mesma demonstração funciona para o seguinte enunciado, mais geral:

Teorema 3.3. *Seja $\mathcal{G}$ uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, pertencente a um feixe linear de folheações. Então $\mathcal{G}$ satisfaz uma das alternativas:*

(a) $\mathcal{G}$ possui uma hipersuperfície algébrica invariante;

(b) $\mathcal{G}$ é invariante por uma folheação $\mathcal{F}$ por variedades algébricas de codimensão dois.

Como antes, a folheação $\mathcal{F}$ do ítem (b) é o eixo do feixe linear e admite duas integrais primeiras racionais independentes. Resumimos a seguir a demonstração contida em [2]. Seja $\mathcal{G} \in \mathcal{F}ol_n(d)$ pertencente a um feixe linear de folheações em $\overline{\mathcal{F}ol_n(d)}$ e definida por uma 1-forma polinomial ω. Calculamos a 1-forma θ como na proposição 3.1 e sua curvatura $d\theta$. No caso em que $d\theta = 0$, temos, por

[4],

$$\theta = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{h}{f_1^{r_1-1}\cdots f_k^{r_k-1}}\right), \tag{2}$$

onde $f_1, \ldots, f_k$ são polinômios homogêneos irredutíveis, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $r_i \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq i \leq k$, e h é polinômio homogêneo que não possui como fator o polinômio f_i sempre que $r_i > 1$, sendo que a função racional $h/f_1^{r_1-1}\cdots f_k^{r_k-1}$ tem grau zero. Dessa expressão e de $d\omega = \theta \wedge \omega$ conclui-se que as hipersuperfícies de equação $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, são invariantes por $\mathcal{G}$. Logo, essas mesmas hipersuperfícies são invariantes por todas as folheações do feixe linear e, evidentemente, também são invariantes pelo eixo $\mathcal{F}$. No caso de um feixe linear com curvatura não nula, $d\theta \neq 0$, o eixo do feixe linear $\mathcal{F}$ possui, necessariamente, uma integral primeira racional. Quando existem duas integrais primeiras racionais independentes, estamos na alternativa (b) do teorema. Caso contrário, se $\mathcal{G}_t \in \mathcal{F}ol_n(d)$, $t \in \mathbb{P}^1$, é uma folheação do feixe linear induzida pela 1-forma polinomial ω_t, é possível construir uma 1-forma holomorfa polinomial homogênea θ_t de grau -1 satisfazendo $d\theta_t = 0$ e $d\omega_t = \theta_t \wedge \omega_t$. Assim, de modo análogo ao caso em que a curvatura é nula, fazendo uso da expressão (2) para a 1-forma fechada θ_t, encontramos hipersuperfícies invariantes por $\mathcal{G}_t$. Observamos que, nesse caso, as hipersuperfícies invariantes dependem da folheação $\mathcal{G}_t$.

Tendo como ponto de referência o eixo do feixe linear $\mathcal{F}$, podemos sintetizar a discussão do parágrafo anterior no seguinte resultado:

Corolário 3.4. *Seja $\mathcal{F}$ folheação de codimensão dois em $\mathbb{P}^n$. Suponha que $\mathcal{F}$ seja eixo de um feixe linear de folheações de codimensão um. Então $\mathcal{F}$ possui alguma hipersuperfície algébrica invariante. No caso em que a curvatura do feixe linear é não nula, $\mathcal{F}$ possui integral primeira racional e, nesse caso, $\mathcal{F}$ possui infinitas hipersuperfícies algébricas invariantes.*

Provamos agora o lema:

Lema 3.5. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão dois em $\mathbb{P}^n$ que deixa invariante três folheações de codimensão um definidas, em coordenadas homogêneas, por 1-formas integráveis ω_1, ω_2 e ω_3. Então existem polinômios homogêneos α_1, α_2 e α_3, primos dois a dois, tais que*

$$\alpha_3\omega_3 \;=\; \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2. \tag{3}$$

Demonstração. Podemos escrever

$$\omega_1 \wedge \omega_3 = f_1\theta \quad \text{e} \quad \omega_2 \wedge \omega_3 = -f_2\theta,$$

onde f_1 e f_2 são polinômios homogêneos e θ é uma 2-forma polinomial homogênea com conjunto singular de codimensão pelo menos dois que induz $\mathcal{F}$. Temos então

$$\left(\frac{1}{f_1}\omega_1 + \frac{1}{f_2}\omega_2\right) \wedge \omega_3 = 0.$$

Multiplicando por uma função racional homogênea, podemos cancelar polos e zeros da 1-forma $\omega = 1/f_1\,\omega_1 + 1/f_2\,\omega_2$, obtendo uma 1-forma polinomial homogênea $\tilde{\omega}$ tal que $\tilde{\omega} \wedge \omega_3 = 0$. Uma vez que $\tilde{\omega}$ é contraída a zero pelo campo radial, a distribuição de hiperplanos tangentes definida em $\mathbb{C}^{n+1}$ por $\tilde{\omega}$ desce a $\mathbb{P}^n$. Temos então duas distribuições em $\mathbb{P}^n$, definidas por ω_3 e $\tilde{\omega}$, que coincidem fora de um conjunto analítico de codimensão pelo menos dois. Logo $\tilde{\omega} = \lambda\omega_3$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Isso é suficiente para obter polinômios homogêneos α_1, α_2 e α_3 satisfazendo (3). Por fim observamos que um fator comum a dois desses polinômios também seria fator do terceiro e poderia ser cancelado. Assim, podemos supor α_1, α_2 e α_3 primos dois a dois. □

Consideramos o seguinte lema

Lema 3.6. *Sejam ω_1 e ω_2 1-formas em $\mathbb{C}^{n+1}$ cujos coeficientes são polinômios homogêneos de mesmo grau tais que $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. Suponha que Sing$(\omega_1)$ e Sing(ω_2) não têm componente comum de codimensão um. Então o elemento genérico do feixe linear de 1-formas*

$$\{t_1\omega_1 + t_2\omega_2;\ (t_1 : t_2) \in \mathbb{P}\}$$

tem conjunto singular de codimensão pelo menos dois.

Demonstração. Escrevemos

$$\omega_1 = \sum_{i=0}^{n} A_i dX_i \quad \text{ e } \quad \omega_2 = \sum_{i=0}^{n} B_i dX_i,$$

onde A_i e B_i são polinômios homogêneos de mesmo grau. Vamos supor, por absurdo, o resultado falso. Então, para t genérico, a 1-forma $\omega_t = \omega_1 + t\omega_2$ tem componente de codimensão um em seu conjunto singular. Para cada um desses valores de t, seja $g_t = 0$ a equação dessa componente, onde g_t é um polinômio não constante reduzido. Para cada par i, j, com $0 \leq i, j \leq n$, temos que $A_i + tB_i$ e $A_j + tB_j$ se anulam sobre $\{g_t = 0\}$. Se g_t não é fator de B_i ou de B_j, então $A_i/B_i = t = A_j/B_j$ sobre $\{g_t = 0\}$, o que implica em $A_iB_j - A_jB_i = 0$ sobre $\{g_t = 0\}$. O mesmo vale se g_t é um fator de B_i (ou de B_j), visto que, nesse caso, também será fator de A_i (ou A_j). De qualquer forma, temos que g_t é um fator de $A_iB_j - A_jB_i$. Finalmente, a hipótese sobre os conjuntos singulares de ω_1 e de ω_2 implica que, variando t, existem infinitos desses polinômios g_t. Isso resulta em $A_iB_j - A_jB_i = 0$, ou seja $A_i/B_i = A_j/B_j = \Phi$, onde Φ é uma função racional de grau zero. Variando i e j, concluímos que $\omega_1 = \Phi\,\omega_2$, o que contradiz $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$. □

Como consequência dos dois últimos lemas, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.7. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão dois em $\mathbb{P}^n$ que deixa invariante três folheações de codimensão um. Então $\mathcal{F}$ deixa invariante um feixe linear de folheações.*

Demonstração. Suponha que as folheações de codimensão um sejam induzidas em coordenadas homogêneas por 1-formas polinomiais homogêneas integráveis ω_1, ω_2, ω_3. Do lema 3.5, existem polinômios homogêneos α_1, α_2 e α_3 tais que

$$\alpha_3\omega_3 \;=\; \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2. \tag{4}$$

Observe que se ω é uma forma polinomial homogêneas integrável cuja contração pelo campo radial é nula, e α é um polinômio homogêneo, então a 1-forma polinomial homogênea $\alpha\omega$ também é integrável e sua contração pelo campo radial é nula. Assim, uma vez que a 1-forma integrável $\alpha_3\omega_3$ está no feixe linear de 1-formas gerado por $\alpha_1\omega_1$ e $\alpha_2\omega_2$, temos que todas as 1-formas nesse feixe linear são integráveis. Observamos ainda que $\alpha_1\omega_1$ e $\alpha_2\omega_2$ não possuem componente comum de codimensão 1 em seus conjuntos singulares. Assim, pelo lema 3.6, o elemento genérico do feixe linear gerado por elas tem conjunto singular de codimensão pelo menos dois. Trata-se, portanto, de um feixe linear de folheações. Finalizamos a demonstração observando que a folheação $\mathcal{F}$ é o eixo desse feixe linear. □

A proposição acima, em conjunto com a versão generalizada do teorema de Cerveau nos dá:

Corolário 3.8. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão dois em $\mathbb{P}^n$. Suponha que $\mathcal{F}$ não deixe hipersuperfícies de $\mathbb{P}^n$ invariantes. Então existem no máximo duas folheações de codimensão um em $\mathbb{P}^n$ invariantes por $\mathcal{F}$.*

4. Folheações induzidas por 1-formas racionais fechadas

Iniciamos por fornecer alguns exemplos de feixes lineares gerados por folheações definidas por 1-formas racionais fechadas.

Exemplo 4.1. Seja $\mathcal{G}$ uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^n$ induzida por uma 1-forma meromorfa fechada η. Nesse caso, η tem uma expressão como em (2):

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{h}{f_1^{r_1-1}\cdots f_k^{r_k-1}}\right). \tag{5}$$

A folheação $\mathcal{F}$ será então induzida pela 1-forma polinomial homogênea $\omega = F\eta$, sendo que F é o polinômio homogêneo de menor grau que cancela os polos de η, ou seja, $F = f_1^{r_1}\cdots f_k^{r_k}$. Observe que, como grau$(\eta) = -1$, então grau$(F) = d+2$. Temos

$$d\omega \;=\; dF\wedge\eta \;=\; \frac{dF}{F}\wedge F\eta \;=\; \frac{dF}{F}\wedge\omega.$$

Assim, se $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são duas folheações de mesmo grau em $\mathbb{P}^n$ induzidas por 1-formas polinomiais homogêneas ω_1 e ω_2 tais que $\omega_1 = F\eta_1$ e $\omega_2 = F\eta_2$, onde η_1 e η_2 são 1-formas racionais homogêneas fechadas de grau -1, então $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ definem um feixe linear de folheações. Nesse caso, temos que $\theta = dF/F$ é tal que $d\omega_1 = \theta\wedge\omega_1$ e $d\omega_2 = \theta\wedge\omega_2$ e, assim, a curvatura $d\theta$ do feixe linear é nula.

Os dois exemplos seguintes são casos particulares do anterior:

Exemplo 4.2. Uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}^n$ possuindo *integral primeira racional* $\Phi = F/G$, onde F e G são polinômios homogêneos de mesmo grau, é induzida pela 1-forma polinomial homogênea

$$\omega \;=\; G^2 d\left(\frac{F}{G}\right) \;=\; GdF - FdG.$$

Considere $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ folheações de codimensão um de mesmo grau possuindo integrais primeiras racionais $\Phi_1 = F_1/G_1$ e $\Phi_2 = F_2/G_2$, induzidas por 1-formas polinomiais homogêneas

$$\omega_1 = G_1 dF_1 - F_1 dG_1 \quad \text{e} \quad \omega_2 = G_2 dF_2 - F_2 dG_2.$$

Se $G_1 = \lambda G_2$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$, então $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ definem um feixe linear de folheações. Nesse caso, a 1-forma $\theta = 2dG_1/G_1 = 2dG_2/G_2$ é tal que $d\omega_1 = \theta \wedge \omega_1$ e $d\omega_2 = \theta \wedge \omega_2$ e a curvatura $d\theta$ do feixe linear é nula. Em particular, duas folheações de codimensão um e mesmo grau que possuem integrais primeiras polinomiais em relação ao mesmo sistema de coordenadas afins sempre definem um feixe linear de folheações com curvatura nula.

Exemplo 4.3. Uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}^n$ é dita *logarítmica* se é induzida em coordenadas homogêneas pela 1-forma holomorfa

$$\omega \;=\; f_1 \cdots f_r \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{df_i}{f_i} \;=\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_r df_i,$$

onde $r > 1$, $f_1, \ldots, f_r$ são polinômios homogêneos irredutíveis tais que grau$(f_i) = d_i > 0$, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}^*$ satisfazem $\lambda_1 d_1 + \cdots \lambda_r d_r = 0$. Se $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são folheações logarítmicas de mesmo grau induzidas, respectivamente, por

$$\omega_1 \;=\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_r df_i \qquad \text{e} \qquad \omega_2 \;=\; \sum_{i=1}^{r} \mu_i f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_r df_i,$$

então $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ definem um feixe linear de folheações, sendo que a 1-forma $\theta = d(f_1 \cdots f_r)/(f_1 \cdots f_r)$ é tal que $d\omega_1 = \theta \wedge \omega_1$ e $d\omega_2 = \theta \wedge \omega_2$. Esse feixe linear tem, portanto, curvatura $d\theta = 0$.

Finalizamos com o seguinte resultado, que caracteriza os feixes lineares de folheações com curvatura nula gerados por duas folheações induzidas por 1-formas meromorfas fechada.

Teorema 4.4. *Sejam $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ duas folheações de codimensão um em $\mathbb{P}^n$, de mesmo grau d, definidas por formas racionais homogêneas η_1 e η_2, ambas fechadas de grau -1. Suponha que elas geram um feixe linear de folheações com curvatura nula. Então temos as seguintes possibilidades:*

(i) Pelo menos uma das folheações $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$ possui integral primeira racional;

(ii) Existe F polinômio homogêneo de grau $d+2$ tal que $\omega_1 = F\eta_1$ e $\omega_2 = F\eta_2$ são 1-formas polinomiais de grau $d+1$ que induzem $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, respectivamente;

(iii) Pelo menos uma das folheações $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$ é logarítmica;

(iv) As 1-formas racionais que induzem $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ se escrevem como

$$\begin{cases} \eta_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{dg_i}{g_i} + \lambda \frac{d(\phi_1 \ldots \phi_r)}{\phi_1 \ldots \phi_r} + d\left(\frac{H}{g_1^{r_1-1} \cdots g_l^{r_l-1}}\right) \\ \eta_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{dg_i}{g_i} + \lambda \frac{d(\psi_1 \ldots \psi_s)}{\psi_1 \ldots \psi_s} + d\left(\frac{H}{g_1^{r_1-1} \cdots g_l^{r_l-1}}\right) \end{cases}$$

onde $g_1, \ldots, g_l, \phi_1, \ldots, \phi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s$ são polinômios homogêneos irredutíveis, dois a dois primos entre si, $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Z}$, com $r_i > 1$ para todo $i = 1, \ldots, l$, e H é polinômio homogêneo, não divisível por g_i, $i = 1, \ldots, l$, tal que a função racional $H/g_1^{r_1-1} \cdots g_l^{r_l-1}$ tem grau zero.

Demonstração. Sejam $\omega_1 = F_1\eta_1$ e $\omega_2 = F_2\eta_2$ as formas polinomiais homogêneas que definem $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$. Observe que $\text{grau}(F_1) = \text{grau}(F_2) = d + 2$. Como em (2), escrevemos
(6)

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{H_1}{f_1^{r_1-1} \cdots f_k^{r_k-1}}\right) \quad \text{e} \quad \eta_2 = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{H_2}{f_1^{s_1-1} \cdots f_k^{s_k-1}}\right)$$

Exigimos aqui que cada hipersuperfície $f_i = 0$ seja componente polar de pelo menos uma das duas 1-formas, mas não necessariamente das duas. Permitimos, assim, que um ou mais dos λ_i's ou dos μ_i's se anulem. Tendo isso em mente, para cálculos posteriores, definimos números α_i e β_i, $i = 1, \ldots, k$, da seguinte forma:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{se } f_i = 0 \text{ não é componente polar de } \eta_1 \\ 1 & \text{se } f_i = 0 \text{ é componente polar de } \eta_1 \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 0 & \text{se } f_i = 0 \text{ não é componente polar de } \eta_2 \\ 1 & \text{se } f_i = 0 \text{ é componente polar de } \eta_2 \end{cases}$$

Os polinômios F_1 e F_2 são calculados como no exemplo 4.1, cancelando os polos de η_1 e de η_2. Assim, $\alpha_i = 1$ se, e somente se, f_i é fator de F_1. O mesmo vale para β_i e F_2. Note que não podemos ter simultaneamente $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = 0$. Além disso, $\alpha_i = 1$ sempre que $r_i > 1$ e $\beta_i = 1$ sempre que $s_i > 1$. As seguintes expressões serão usadas mais adiante:

$$\frac{dF_1}{F_1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i r_i \frac{df_i}{f_i} \quad \text{e} \quad \frac{dF_2}{F_2} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i s_i \frac{df_i}{f_i}. \tag{7}$$

Procedemos então o cálculo da curvatura do feixe linear. Temos

$$d\omega_1 = \frac{dF_1}{F_1} \wedge \omega_1 \quad \text{e} \quad d\omega_2 = \frac{dF_2}{F_2} \wedge \omega_2.$$

Seguimos aqui os passos da proposição 3.1. A expressão $\omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 = 0$ nos fornece

$$\left(\frac{dF_2}{F_2} - \frac{dF_1}{F_1}\right) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

de onde existem funções racionais homogêneas Φ_1 e Φ_2, ambas, se não nulas, de grau $-d-2$, tais que

$$\frac{dF_2}{F_2} - \frac{dF_1}{F_1} = \Phi_1\omega_1 - \Phi_2\omega_2. \tag{8}$$

Assim, a 1-forma

$$\theta = \frac{dF_1}{F_1} + \Phi_1\omega_1 = \frac{dF_2}{F_2} + \Phi_2\omega_2$$

é tal que $d\omega_1 = \theta \wedge \omega_1$ e $d\omega_2 = \theta \wedge \omega_2$. Uma vez que a curvatura é nula, obtemos

$$0 \;=\; d\theta \;=\; d\Phi_1 \wedge \omega_1 + \Phi_1 d\omega_1 \;=\; d\Phi_1 \wedge \omega_1 + \Phi_1 \frac{dF_1}{F_1} \wedge \omega_1,$$

ou seja

$$\left(\frac{d\Phi_1}{\Phi_1} + \frac{dF_1}{F_1}\right) \wedge \omega_1 \;=\; 0.$$

Ressaltamos que a função racional homogênea $F_1\Phi_1$ tem grau zero. Assim, se $d\Phi_1/\Phi_1 + dF_1/F_1 \neq 0$, temos que $F_1\Phi_1$ é uma integral primeira racional para $\mathcal{G}_1$. De maneira análoga, temos

$$\left(\frac{d\Phi_2}{\Phi_2} + \frac{dF_2}{F_2}\right) \wedge \omega_2 \;=\; 0,$$

e se $d\Phi_2/\Phi_2 + dF_2/F_2 \neq 0$, a função racional $F_2\phi_2$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{G}_2$. Estamos aqui na situação (i) do teorema.

Passemos à situação em que $d\Phi_1/\Phi_1 + dF_1/F_1 = 0$ e $d\Phi_2/\Phi_2 + dF_2/F_2 = 0$. Nesse caso, existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tais que $\Phi_1 F_1 = c_1$ e $\Phi_2 F_2 = c_2$, ou seja, $\Phi_1 = c_1/F_1$ e $\Phi_2 = c_2/F_2$. De (8), observando que $\omega_1 = F_1\eta_1$ e $\omega_2 = F_2\eta_2$, temos

$$\frac{dF_2}{F_2} - \frac{dF_1}{F_1} = c_1\eta_1 - c_2\eta_2. \tag{9}$$

Na situação em que $c_1 = c_2 = 0$, a expressão acima nos dá $F_2 = \lambda F_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e estamos no caso (ii) do teorema.

Vamos então considerar o caso em que $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$. Retomamos a relação (9), onde escrevemos η_1 como em (6) e usamos a relação (7). Incorporando c_1 à escrita de η_1, temos

$$\sum_{i=1}^{k} (\beta_i s_i - \alpha_i r_i) \frac{df_i}{f_i} \;=\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{H_1}{f_1^{r_1-1}\cdots f_k^{r_k-1}}\right).$$

A expressão do lado esquerdo tem polos de ordem 1. Assim, a parcela exata do lado direito é necessariamente nula. Portanto, $\mathcal{G}_1$ é uma folheação logarítmica e estamos na alternativa (iii) do teorema. De forma simétrica, se $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$, temos que $\mathcal{G}_2$ é logarítmica.

Por fim, vamos considerar o caso em que $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$. A relação (9) fica

$$\sum_{i=1}^{k} (\beta_i s_i - \alpha_i r_i) \frac{df_i}{f_i} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) \frac{df_i}{f_i} + d\left(\frac{H_1}{f_1^{r_1-1}\cdots f_k^{r_k-1}}\right) - d\left(\frac{H_2}{f_1^{s_1-1}\cdots f_k^{s_k-1}}\right).$$

Considerando que a expressão do lado esquerdo tem polos de ordem 1, concluímos que

$$d\left(\frac{H_1}{f_1^{r_1-1}\cdots f_k^{r_k-1}}\right) = d\left(\frac{H_2}{f_1^{s_1-1}\cdots f_k^{s_k-1}}\right).$$

Em particular, $s_i = r_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$, donde

$$\sum_{i=1}^{k} r_i(\beta_i - \alpha_i) \frac{df_i}{f_i} \;=\; \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) \frac{df_i}{f_i}.$$

Analisando a última relação parcela a parcela, dois casos ocorrem, dependendo do valor de r_i:

Caso 1: $r_i > 1$. Nesse caso, f_i é fator de F_1 e de F_2, e assim $\alpha_i = \beta_i = 1$, de onde obtemos $\lambda_i = \mu_i$.

Caso 2: $r_i = 1$. Há duas possibilidades: ou $\alpha_i = 1$ e $\beta_i = 0$, o que implica em $\lambda_i = -1$ e $\mu_i = 0$, ou $\alpha_i = 0$ e $\beta_i = 1$, resultando em $\lambda_i = 0$ e $\mu_i = -1$. Para finalizar, separamos os polinômios f_i em três grupos: os que correspondem aos valores de i para os quais $r_i > 1$ passam a se chamar $g_1, \ldots, g_l$, os que têm índice i tal que $r_i = 1, \alpha_i = 1$ e $\beta_i = 0$ passam a ser denotados $\phi_1, \ldots, \phi_r$ e, enfim, os que correspondem a $r_i = 1, \alpha_i = 0$ e $\beta_i = 1$ entram na lista $\psi_1, \ldots, \psi_s$. Isso nos dá a alternativa (iv) do teorema. $\square$

Referências

[1] Manuel M. Carnicer. The Poincaré problem in the nondicritical case. *Ann. of Math. (2)*, 140(2):289–294, 1994.

[2] Dominique Cerveau. Pinceaux linéaires de feuilletages sur $\mathbb{C}P(3)$ et conjecture de Brunella. *Publ. Mat.*, 46(2):441–451, 2002.

[3] Dominique. Cerveau and Alcides. Lins Neto. Holomorphic foliations in $\mathbf{C}P(2)$ having an invariant algebraic curve. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 41(4):883–903, 1991.

[4] Dominique. Cerveau and J.-F. Mattei. *Formes intégrables holomorphes singulières*, volume 97 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1982.

[5] S. C. Coutinho and J. V. Pereira. On the density of algebraic foliations without algebraic invariant sets. *J. Reine Angew. Math.*, 594:117–135, 2006.

[6] Étienne Ghys. Flots transversalement affines et tissus feuilletés. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (46):123–150, 1991. Analyse globale et physique mathématique (Lyon, 1989).

[7] Xavier Gómez-Mont. Integrals for holomorphic foliations with singularities having all leaves compact. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 39(2):451–458, 1989.

[8] J. P. Jouanolou. *Équations de Pfaff algébriques*, volume 708 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.

[9] A. Lins Neto and M. G. Soares. Algebraic solutions of one-dimensional foliations. *J. Differential Geom.*, 43(3):652–673, 1996.

[10] Alcides Lins Neto. Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two. In *Holomorphic dynamics (Mexico, 1986)*, volume 1345 of *Lecture Notes in Math.*, pages 192–232. Springer, Berlin, 1988.

[11] B. Malgrange. Frobenius avec singularités. I. Codimension un. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (46):163–173, 1976.

[12] Rogério S. Mol. Flags of holomorphic foliations. Pré-publicação, 2010.

[13] Márcio G. Soares. On algebraic sets invariant by one-dimensional foliations on $\mathbf{C}P(3)$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 43(1):143–162, 1993.

[14] Marcio G. Soares. The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one-dimensional foliations. *Invent. Math.*, 128(3):495–500, 1997.

Rogério S. Mol
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos, 6627 C.P. 702
30123-970 - Belo Horizonte - MG
BRASIL
rsmol@mat.ufmg.br