Rev. Semin. Iberoam. Mat. **4** fasc. I (2010) 51–79

Équations aux q-différences linéaires: factorisation, résolution et théorèmes d'indices

Jacques Sauloy,
Laboratoire Emile Picard, UMR 5580,
Université Paul Sabatier, U.F.R. M.I.G.
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France
`sauloy@math.univ-toulouse.fr`

10 décembre 2008

Résumé

Nous décrivons des algorithmes explicites pour la factorisation d'opérateurs et la résolution d'équations aux q-différences. Il s'agit d'une présentation "concrète" de résultats bien connus.

Abstract

We describe explicit algorithms for factoring q-difference operators and solving q-difference equations. These are well known results, presented in a "concrete" form.

Table des matières

---

1 Introduction et généralités

1.1 Introduction

Une équation aux q-différences linéaire d'ordre n est une équation fonctionnelle de la forme :

$$a_n(z)f(q^n z) + a_{n-1}(z)f(q^{n-1}z) + \cdots + a_0(z)f(z) = 0. \tag{1.0.1}$$

Il y a plusieurs manières de justifier leur étude. La plus ancienne met en jeu le "q-calcul", tout particulièrement des formules découvertes par Euler dans l'étude des partitions, donc à la frontière de la combinatoire et de l'arithmétique. Si ces formules elles-mêmes ne font en général apparaitre qu'un paramètre, noté q, certaines séries génératrices qui leurs sont associées satisfont des équations fonctionnelles du type (1.0.1) là où les séries génératrices construites à partir de coefficients combinatoires plus classiques satisferaient des équations différentielles.

A titre d'exemple, un "q-analogue" de la factorielle $n! = \prod\limits_{1 \leq i \leq n} i$ est la "q-factorielle" $[n]_q! := \prod\limits_{1 \leq i \leq n} \frac{q^i-1}{q-1}$. La série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a pour somme la fonction $f(z) = e^z$ qui est solution de l'équation différentielle $f' = f$. De même, la série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{z^n}{[n]_q!}$ admet pour somme une fonction f, l'un des (nombreux) q-analogues de l'exponentielle, et celle-ci est solution de l'équation fonctionnelle $\frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z} = f(z)$, qui se ramène facilement à la forme (1.0.1). Si l'on fait tendre q vers 1 dans la série ou dans l'équation fonctionnelle, on retrouve sa contrepartie classique. De nombreuses autres motivations existent, plus sérieuses ou aussi amusantes, plus modernes ou aussi classiques, plus conceptuelles ou aussi phénoménologiques. On en trouvera un tableau introductif, avec un survol des grands problèmes dans ce domaine, dans l'article [7].

Dans le présent article, nous présenterons de manière détaillée quelques algorithmes de résolution explicite d'équations aux q-différences linéaires. On est souvent guidé par l'analogie avec les équations différentielles, et, comme pour celles-ci, un outil important est la factorisation d'opérateurs, que nous étudions donc aussi. Notre point de vue est analytique et non seulement formel. Nous étudions ces équations dans le champ complexe et cherchons des solutions holomorphes (dans certains domaines). On a constaté depuis longtemps que presque rien n'était possible[1] sans l'hypothèse que $q \in \mathbf{C}^*$ est de module différent de 1.

Exercice. - Déterminer toutes les fonctions f méromorphes sur un voisinage de $0 \in \mathbf{C}$ telles que $f(qz) = f(z)$ lorsque $|q| = 1$. On sera amené à traiter à part le cas où q est une racine de l'unité.

Enfin, conformément à l'évolution de la théorie "moderne" des équations fonctionnelles linéaires, nous abordons le calcul des indices : il ne s'agit pas seulement de savoir si les solutions existent et sont uniques, mais de quantifier le défaut d'existence ou d'unicitÃľ ; donc de calculer des dimensions de noyaux et de conoyaux.

Bien que nous soyons en permanence guidés par la théorie "classique" des équations différentielles dans le champ complexe, il y a ici des spécificités importantes en comparaison avec le cas classique :

1. En supposant seulement les coefficients de (1.0.1) *analytiques* au voisinage de 0, comme pour les équations différentielles, on définit un polygone de Newton en vue de la résolution au voisinage de 0. On rend ses pentes entières par un changement de variables $z = w^\ell, \ell \in \mathbf{Z}$, puis l'on se ramène à la recherche de solutions séries par un changement de fonction inconnue $f = ug$, où la fonction auxiliaire u est solution d'une équation élémentaire. Contrairement au cas des équations différentielles, nous avons ici la garantie que *certaines des séries ainsi obtenues seront convergentes*. C'est le *lemme d'Adams*, qui a été exhumé par Marotte et Zhang après un long sommeil et qui a été l'une des sources de la renaissance de la théorie analytique (cf. par exemple [15]). Une version améliorée, dûe à Birkhoff et Guenther, dit que tout opérateur aux q-différences à coefficients analytiques admet une factorisation analytique à facteurs de degré 1 (modulo ramification), les coefficients étant même polynomiaux. Pour les opérateurs différentiels, seule une factorisation formelle est en général possible.
2. Supposons les coefficients de (1.0.1) rationnels. Alors toute solution méromorphe dans un voisinage (épointé) de 0 dans $\mathbf{C}^*$ se prolonge en une unique solution méromorphe sur tout $\mathbf{C}^*$. Ceci tient à ce que l'équation fonctionnelle elle-même permet de prolonger d'un disque D au disque qD ou $q^{-1}D$ (selon que $|q|$ est > 1 ou < 1). Ainsi, l'étude locale d'une équa-

[1]Une percée a cependant été récemment effectuée par Lucia Di Vizio dans [6].

tion aux q-différences comporte d'emblée des aspects *globaux* qui n'apparaissent pas dans l'étude des équations différentielles.

La plus grande partie des résultats ci-dessous sont classiques : ils remontent à Adams, Birkhoff, Carmichael et d'autres et nous ne présentons qu'une mise au propre au goût du jour (XXIème siècle) d'ailleurs initiée par Bezivin, Ramis, Marotte et Zhang. Il y a cependant une nouveauté importante de la théorie présentée ici par rapport aux travaux plus anciens, c'est que l'on n'y utilise que des fonctions *uniformes*, ce qui est évidemment impossible pour les équations différentielles. En effet, alors que même des équations aussi simples que $zf' = 1$ (i.e. $zf'' + f' = 0$) ou $zf' = \alpha f$, $\alpha \notin \mathbf{Z}$ n'admettent aucune solution uniforme sur $\mathbf{C}^*$ (il faut soit pratiquer des coupures pour se ramener à des ouverts simplement connexes soit passer au revêtement universel), leurs q-analogues peuvent être résolues à l'aide de la fonction Theta de Jacobi, selon une suggestion de Ramis dans [10]. S'il y a une "monodromie" sous-jacente à de telles équations, celle-ci devra donc être observée autrement ! C'est l'objet, en particulier, de [16], [18] et de la série [12],[13],[14].

Organisation de cet article

Les sections 1.2, 1.3 et 1.4 de cette introduction contiennent un résumé rapide des notations, conventions et faits de base ; on y introduit en particulier les fonctions spéciales uniformes sur $\mathbf{C}^*$ qui servent, avec les séries entières, à construire toutes les solutions. Les preuves détaillées figurent dans [16] et, en ce qui concerne le polygone de Newton, dans [17].

Les chapitres 2 et 3 sont respectivement consacrés à la factorisation des opérateurs et à la résolution des équations. On étudie dans chaque cas le problème formel, dont la réponse ressemble à celle que l'on connait pour les équations différentielles, puis le problème analytique, et là, les énoncés sont bien différents. Pour ces deux chapitres, les preuves sont complètes.

Enfin, dans le chapitre 4, on aborde d'un autre point de vue les équations avec second membre : que peut-on dire du défaut d'existence ou d'unicité de leurs solutions, autrement dit, du conoyau et du noyau de l'opérateur associé ?

Aucun de ces résultats n'est très neuf, j'ai simplement voulu donner une forme simple, complète et explicite à des énoncés qui apparaissent en filigrane dans [8],dans [17] et dans [15]. Aucune connaissance préalable des équations aux q-différences n'est requise, mais un peu de familiarité avec les opérateurs différentiels peut aider à suivre les calculs.

Remerciements

Il y a bien des années, José-Manuel Aroca et Felipe Cano m'avaient invité à un exposé de propagande pour les q-différences à Valladolid. Cet article me sert à les en remercier. La rédaction finale a été achevée lors d'un séjour d'un mois

à l'Université des Sciences et Techniques de Lille, où m'avaient invité Changgui Zhang et Anne Duval, que je remercie pour cela et pour tout le reste.

1.2 Conventions générales

On fixe un nombre complexe q de module $|q| > 1$. Le corps de base K est l'un des suivants :

$$\mathcal{M}(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}(\{z\}) \subset \mathbf{C}((z)),$$

respectivement : fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$, germes de fonctions holomorphes en 0 et séries de Laurent méromorphes formelles sur $\mathbf{C}$. Les deux premiers cas constituent le cas "convergent", le dernier cas constitue le cas "formel". Le corps K est muni de la valuation discrète v_0 (valuation z-adique) : on a $v_0(f) = k$ si $f = z^k g$ avec $g(0) \in K^*$. On notera $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation correspondant, de corps résiduel $\mathcal{O}/z\mathcal{O} = \mathbf{C}$. Le corps K est également muni d'un automorphisme :

$$\sigma_q : f(z) \mapsto f(qz).$$

De manière générale, une extension (K', σ') du "corps aux différences" (K, σ_q) est formée d'une extension K' de K et d'un automorphisme σ' de K' qui étend σ_q.

Un premier exemple de telle extension est obtenu par ramification de niveau $\ell \in \mathbf{N}^*$: on prend $K' := K_\ell = K[z_\ell]$, où $z_\ell^\ell = z$; et $\sigma'(z_\ell) = q_\ell z_\ell$, où q_ℓ est une racine ℓ-ème de q dans $\mathbf{C}$. On peut d'ailleurs rendre ces extensions compatibles, en prenant tous les K_ℓ sous-extensions d'une même extension K_∞ (dans les cas de $\mathbf{C}(\{z\})$ et $\mathbf{C}((z))$, c'est leur clôture algébrique), de sorte que l'on ait $z_{\ell m}^\ell = z_m$; et poser $q_\ell = e^{r/\ell}$, où l'on a choisi τ tel que $q = e^r$, de sorte que $q_{\ell m}^\ell = q_m$.

Un deuxième exemple de telle extension se présente lorsque l'on choisit une *algèbre* de fonctions L dans laquelle on espère résoudre toutes les équations aux q-différences à coefficients dans K. Si $K = \mathcal{M}(\mathbf{C})$, on prendra ainsi $L = \mathcal{M}(\mathbf{C}^*)$; de même, si $K = \mathbf{C}(\{z\}))$, on prendra $L = \mathcal{M}(\mathbf{C}^*, 0)$, le corps des germes en 0 de fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}^*$. L'automorphisme σ_q de L est encore $f(z) \mapsto f(qz)$. On va construire plus loin des fonctions dans L solutions des équations de base : la fonction Theta de Jacobi, qui vérifie $\sigma_q \Theta = z\Theta$; pour chaque $c \in \mathbf{C}^*$, une fonction $e_{q,c}$ telle que $\sigma_q e_{q,c} = c e_{q,c}$ (ces fonctions sont appelées "q-caractères", en analogie avec les "caractères" z^γ) ; et une fonction l_q telle que $\sigma_q l_q = l_q + 1$ (appelée "q-logarithme").

Si $K = \mathbf{C}((z))$ ("cas formel"), l'extension L de K sera obtenue par adjonction de *symboles* permettant de résoudre les équations de base :

1. Pour chaque $c \in \mathbf{C}^*$, on introduit $e_{q,c}$ tel que $\sigma_q e_{q,c} = c e_{q,c}$. On impose de plus les relations suivantes : $e_{q,c} e_{q,d} = e_{q,cd}$; et $e_{q,1} = 1$, $e_{q,q} = z$.
2. On introduit Θ tel que $\sigma_q \Theta = z\Theta$, et on le suppose inversible.

3. On introduit l_q tel que $\sigma_q l_q = l_q + 1$.

Dans ce cas, la K-algèbre L n'est pas un corps, et même pas intègre (elle est étudiée dans [9]).

Les *constantes* de notre théorie sont les éléments invariants par σ_q. Le corps des constantes C_K de K est $\mathbf{C}$ dans tous les cas. Celui de L est encore $C_L = \mathbf{C}$ dans le cas formel (*voir* [9]). Dans le cas convergent, il s'identifie au corps $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$ des fonctions elliptiques relatif à la courbe elliptique $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ (*voir* [16]).

Tout complexe non nul s'écrit de manière unique :

$$c = q^{\epsilon(c)}\overline{c} \quad \text{avec} \quad \epsilon(c) \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad 1 \leq |\overline{c}| < |q|\,.$$

Nous identifierons l'ensemble quotient $\mathbf{E}_q = \mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ (qui est une courbe elliptique) à la *couronne fondamentale* $\{z \in \mathbf{C}^* \mid 1 \leq |z| < |q|\}$, qui en est un système de représentants dans $\mathbf{C}^*$, et le représentant $\overline{c}$ à la classe de c modulo $q^{\mathbf{Z}}$.

On notera enfin $\mathcal{D}_{q,K} = K\left\langle \sigma, \sigma^{-1}\right\rangle$ l'algèbre de Öre des polynômes de Laurent non commutatifs, caractérisée par les relations :

$$\forall x \in K, \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ \sigma^k x = \sigma_q^k(x)\sigma^k.$$

Un tel polynôme $P \in \mathcal{D}_{q,K}$ modélise donc l'opérateur aux q-différences $P(\sigma_q)$, d'où une opération de $\mathcal{D}_{q,K}$ sur L. On dira que le polynôme P est *entier* si tous ses monômes σ^k sont à degrés $k \geq 0$. Pour un tel $P = a_n\ \sigma^n + \cdots + a_0$, on a donc :

$$P.f = P(\sigma_q)(f) = a_n\ \sigma_q^n f + \cdots + a_0\ f = 0,$$

et l'équation (1.0.1) s'écrit : $P.f = 0$.

L'anneau $\mathcal{D}_{q,K}$ est euclidien (à gauche et à droite). Soit $P = \sum\limits_{\alpha \leq i \leq \beta} a_i \sigma^i$ un élément de $\mathcal{D}_{q,K}$. On appellera *degré absolu* de P l'entier naturel $\deg(P) = \beta - \alpha$ si $a_\alpha a_\beta \neq 0$ (et $-\infty$ si $P = 0$) et *valuation z-adique* de P l'entier $v_0(P) = \min(v_0(a_\alpha), \ldots, v_0(a_\beta))$ (donc $+\infty$ si $P = 0$). On a : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et $v_0(PQ) = v_0(P) + v_0(Q)$. (La preuve de toutes ces affirmations est un exercice amusant laissé au lecteur.)

1.3 Fonctions spéciales

Désignons par θ_q la fonction Theta de Jacobi (*voir* [11]) :

$$\theta_q(z) := \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n q^{-n(n-1)/2} z^n$$

C'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^*$, qui vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\theta_q(qz) = -qz\theta_q(z).$$

La fonction Theta satisfait la célèbre *formule du triple produit de Jacobi* :

$$\theta_q(z) = (p;p)_\infty (z;p)_\infty (pz^{-1};p)_\infty$$

On note ici $p := q^{-1}$ et l'on utilise le *symbole de Pochhammer* $(x;p)_\infty := \prod_{n\geq 0} (1-p^n x)$. La fonction θ_q admet donc pour zéros les points de la q-spirale logarithmique discrète $q^{\mathbf{Z}}$, et ces zéros sont simples.

Modifiant légèrement les notations de [16], nous poserons (dans un but de simplicité) :

$$\Theta_q(z) := \theta_q(-z/q) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{-n(n+1)/2} z^n.$$

C'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^*$, qui vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Theta_q(qz) = z\Theta_q(z).$$

Elle admet pour zéros les points de la q-spirale logarithmique discrète $-q^{\mathbf{Z}}$, et ces zéros sont simples.

Nous poserons également :

$$l_q(z) = z\Theta_q'(z)/\Theta_q(z),$$

qui est méromorphe sur $\mathbf{C}^*$ avec pour pôles (simples) les points de la q-spirale logarithmique discrète $-q^{\mathbf{Z}}$, et qui vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\sigma_q l_q = l_q + 1.$$

Enfin, pour tout complexe non nul c, nous poserons :

$$e_{q,c}(z) = \Theta_q(z)/\Theta_q(c^{-1}z),$$

qui est méromorphe sur $\mathbf{C}^*$ avec pour zéros (simples) les points de la q-spirale logarithmique discrète $-q^{\mathbf{Z}}$, pour pôles (simples) les points de la q-spirale logarithmique discrète $-cq^{\mathbf{Z}}$, et qui vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\sigma_q e_{q,c} = c e_{q,c}.$$

Remarque 1.1 Il est clair que chaque fonction $\dfrac{e_{q,cd}}{e_{q,c}e_{q,c}}$ est une q-constante, donc un élément de $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$. En fait, on déduit sans difficulté de la théorie des fonctions elliptiques que les $\dfrac{e_{q,cd}}{e_{q,c}e_{q,c}}$ engendrent l'extension $\mathcal{M}(\mathbf{E}_q)$ de $\mathbf{C}$, donc que l'on hérite d'un "gros" corps des constantes uniquement pour résoudre les équations élémentaires $\sigma_q f = cf$. Ce n'est pas dû à un choix maladroit de fonctions de base : quelque soit le choix des dolutions f_c de $\sigma_q f = cf$, on peut démontrer que les $\dfrac{f_{cd}}{f_c f_c}$ engendrent une extension transcendante de $\mathbf{C}$.

1.4 Le polygone de Newton

Toutes les preuves des assertions données ici figurent[2] dans [17].

Soit $P = \sum a_i \, \sigma_q^i \in \mathcal{D}_{q,K}$ un opérateur aux q-différences non nul. On définit son *polygone de Newton* $N(P)$ comme l'enveloppe convexe de l'ensemble :

$$\{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 \,|\, j \geq v_0(a_i)\} \subset \mathbf{R}^2.$$

C'est aussi, par définition, le polygone de Newton de l'équation aux q-différences $P.f = \sum a_i \, \sigma_q^i f = 0$. Cette définition dépend du choix de la valuation v_0. Dans le cas d'équations à coefficients dans K_ℓ (obtenues par ramification) c'est la valuation z_ℓ-adique qui sera employée. Si l'on multiplie P par un inversible $a\sigma_q^m$, $a \in K^*$, $m \in \mathbf{Z}$, le polygone de Newton est translaté par le vecteur $(m, v_0(a)) \in \mathbf{Z}^2$. Nous considèrerons donc $N(P)$ comme défini à une telle translation près.

La frontière de $N(P)$ est formée de deux demi-droites verticales et de $k \geq 1$ vecteurs de coordonnées $(r_1, d_1), \ldots, (r_k, d_k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z}$, et de pentes $\mu_1 = \frac{d_1}{r_1}, \ldots, \mu_k = \frac{d_k}{r_k} \in \mathbf{Q}$. On suppose celles-ci rangées par ordre croissant : $\mu_1 < \cdots < \mu_k$. La *dernière pente* est μ_k (donc, la plus grande). On notera $S(P) = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ l'ensemble des pentes de P. La *fonction de Newton* de P est la fonction $r_P : \mathbf{Q} \to \mathbf{N}$ de support $S(P)$ et telle que $\mu_i \mapsto r_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a donc :

$$r_P = \sum_{i=1}^{k} r_i \delta_{\mu_i},$$

où δ_μ désigne la fonction de Kronecker (indicatrice de $\{\mu\}$). La correspondance entre fonctions de Newton et polygones de Newton (définis à translation près) est une bijection additive.

Par *ramification* $z = z_\ell^\ell$, $q = q_\ell^\ell$, les pentes sont multipliées par ℓ. En particulier, en prenant pour ℓ un multiple commun des r_i, on se ramène au cas où les pentes sont entières. Cette opération revient à une extension de corps aux q-différences, soit encore à une extension du corps de base de l'algèbre $\mathcal{D}_{q,K}$. Elle est donc compatible avec les opérations de $\mathcal{D}_{q,K}$.

Tout élément α de K^* s'écrit de manière unique $\alpha = cz^\mu \beta$, où $c \in \mathbf{C}^*$, $\mu \in \mathbf{Z}$ et $\beta(0) = 1$. Pour résoudre l'équation $\sigma_q u = \alpha u$, nous prendrons $u = e_{q,c} \Theta_q^\mu v$, où $v(z) = \prod\limits_{k \geq 1} \beta(q^{-k} z)$; on vérifie en effet facilement que $v \in K^*$ (aussi bien dans le cas formel que dans le cas convergent). On notera $e_{q,\alpha}$ l'élément u ainsi obtenu ; c'est un élément inversible de L.

[2] Attention : il y a eu un changement de convention dans la définition des pentes : celles étudiées ici sont les *opposées* de celles étudiées dans *loc.cit.*.

Soit $\alpha \in K^*$ et soit u un élément inversible d'une extension K' de K tel que $\sigma_q u = \alpha u$. La "transformation de jauge" (changement de fonction inconnue) $f = ug$ donne lieu à une équivalence logique (changement d'équation) $Pf = 0 \Leftrightarrow P^{[u]}g = 0$, avec : $P^{[u]} \underset{def}{=} u^{-1}Pu$, que l'on va expliciter. Soit, pour simplifier, $P := \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \sigma_q^i$.

$$P^{[u]} = \sum_{i=0}^{n} a_i u^{-1} \sigma_q^i u = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\sigma_q^i(u)}{u} \sigma_q^i = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\prod_{j=0}^{i-1} \sigma_q^j(\alpha) \right) \sigma_q^i.$$

Ainsi, $P^{[u]} = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i \sigma_q^i$, avec $b_i := a_i \prod\limits_{j=0}^{i-1} \sigma_q^j(\alpha)$, donc, $v_0(b_i) = v_0(a_i) + iv_0(\alpha)$ (puisque $v_0(\sigma_q^j(\alpha)) = v_0(\alpha)$), d'où l'on déduit que les pentes de $P^{[u]}$ sont $\mu_1 + v_0(\alpha), \ldots, \mu_k + v_0(\alpha)$. On peut ainsi ramener une pente entière à 0 : si $\mu_i \in \mathbf{Z}$, on prend $u = e_{q,z^{-\mu_i}} = \Theta_q^{-\mu_i}$.

Remarquons que $P^{[u]}$ peut être défini directement en fonction de α seul, sans faire référence à une solution de l'équation $\sigma_q u = \alpha u$ dans une extension de K : il suffit de prendre la formule établie ci-dessus comme définition. On prouve alors facilement (exercice pour le lecteur courageux) que $P \mapsto P^{[u]}$ est un automorphisme de $\mathcal{D}_{q,K}$ et que, si $u, v \in K'$ sont ainsi associés à $\alpha, \beta \in K^*$, on a la formule $P^{[uv]} = \left(P^{[u]}\right)^{[v]}$.

Supposons maintenant que $S(P) \subset \mathbf{Z}$. On va définir l'équation caractéristique et les exposants attachés à la i-ème pente $\mu = \mu_i$ de P. Il existe des indices $\alpha < \beta$ et un entier $\ell \in \mathbf{Z}$ tels que, notant $P' := P^{[e_{q,z^{-\mu}}]} = \sum a'_i \sigma_q^i$:

$$\begin{aligned} \forall i \, , \, v_0(a'_i) &\geq \ell, \\ v_0(a'_\alpha) = v_0(a'_\beta) &= \ell, \\ \forall i < \alpha \, , \, v_0(a'_i) &> \ell, \\ \forall i > \beta \, , \, v_0(a'_i) &> \ell. \end{aligned}$$

Bien entendu, $\ell = v_0(P')$. Avec les notations précédentes $\mu_i = \dfrac{d_i}{r_i}$, on a $r_i = \beta - \alpha$ et $d_i = v_0(a_\beta) - v_0(a_\alpha)$. On introduit : $Q := z^{-\ell}P' = \sum b_i \sigma_q^i$, dont les coefficients sont donc dans l'anneau de valuation $\mathcal{O}$ de K et même tels que $v_0(b_\beta) = v_0(b_\alpha) = 0$. En posant :

$$\begin{aligned} \overline{Q} &\underset{def}{=} \sum b_i(0) \; s^i \\ &= b_\alpha(0) \; s^\alpha + \cdots + b_\beta(0) \; s^\beta \in \mathbf{C}[s, s^{-1}], \end{aligned}$$

on a $b_\alpha(0) b_\beta(0) \neq 0$. L'équation $\overline{Q} = 0$ (ainsi que le polynôme $\overline{Q}$ lui-même) est appelée *équation caractéristique* attachée à la pente μ de P ; on peut la considérer comme définie à un facteur cs^k près, $c \in \mathbf{C}^*, k \in \mathbf{Z}$. On la notera $\overline{P}^{(\mu)}$, ou simplement $\overline{P}$ dans le cas de la pente $\mu = 0$. Si $\mu \notin S(P)$, l'équation caractéristique est une constante non nulle. En général :

$$\overline{P}^{(\mu)} = \left(z^{-v_0(P^{[e_{q,z^{-\mu}}]})} P^{[e_{q,z^{-\mu}}]} \right)_{z=0}.$$

Dans tous les cas, $r_P(\mu)$ est égal au degré absolu $\deg(\overline{P}^{(\mu)})$ de l'équation caractéristique. L'équation caractéristique est multiplicative :

$$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{D}_{q,K} \ , \ \forall \mu \in \mathbf{Q} \ , \ \overline{P_1 P_2}^{(\mu)} = \overline{P_1}^{(\mu)} \overline{P_2}^{(\mu)}.$$

On en déduit que le polygone de Newton est additif. Précisément, P_1 et P_2 étant des opérateurs aux q-différences comme ci-dessus :

$$\begin{array}{rcl} r_{P_1 P_2} & = & r_{P_1} + r_{P_2}, \\ N(P_1 P_2) & = & N(P_1) + N(P_2). \end{array}$$

(Cette dernière égalité concerne des parties de $\mathbf{R}^2$ définies à une translation de $\mathbf{Z}^2$ près !)

Les racines non nulles de l'équation caractéristique attachée à la pente μ de P sont appelées les *exposants* attachés à cette pente. Tout exposant c s'écrit de manière unique :

$$c = q^{\epsilon(c)} \overline{c} \quad \text{avec} \quad \epsilon(c) \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad 1 \leq |\overline{c}| < |q| \, .$$

Nous dirons que l' exposant c attaché à la pente μ est *non résonnant* si $\epsilon(c)$ est maximal pour sa classe de congruence, autrement dit, si aucun cq^ℓ, $\ell \in \mathbf{N}^*$, n'est un exposant (attaché à cette pente).

Si $\sigma_q u = z^\ell u$, l'équation caractéristique attachée à la pente μ de P est égale à l'équation caractéristique attachée à la pente $\mu + \ell$ de $P^{[u]}$. Si $\sigma_q u = cu$, $c \in \mathbf{C}^*$, et si l'on note $\overline{Q}(s)$ l'équation caractéristique attachée à la pente μ de P, l'équation caractéristique attachée à la pente μ de $P^{[u]}$ est $\overline{Q}(cs)$. On peut donc toujours ramener un exposant donné à 1 par une telle transformation de jauge. Dans ce dernier cas, quitte à utiliser encore une transformation de jauge avec $u = z^\ell$, $\ell \in \mathbf{Z}$, on peut même supposer 1 non résonnant.

2 Factorisation formelle et factorisation convergente

En principe, la résolution de l'équation (1.0.1) et la factorisation de l'opérateur aux q-différences P sont étroitement imbriquées. Nous exposons d'abord la factorisation. Pour la commodité du lecteur, nous reprenons brièvement certains calculs de [17].

2.1 Facteur droit associé à un exposant non résonnant

Comme on l'a vu, on peut ramener, par l'intermédiaire de transformations de jauge simples, toute pente μ à 0 et tout exposant c attaché à cette pente à 1. On peut même supposer que 1 est non résonnant, autrement dit, qu'aucun q^k , $k \in \mathbf{N}^*$ n'est un exposant attaché à la pente 0.

Lemme 2.1 *Supposons que* 0 *est une pente de* P *et que* 1 *est un exposant non résonnant attaché à cette pente. L'équation (1.0.1) admet alors une unique solution série formelle* f *telle que* $f(0) = 1$.

Preuve. - Comme précédemment (définition de l'équation caractéristique au 1.4), on peut supposer $N(P)$ calé de sorte que la pente nulle soit sur l'axe des abcisses. On suppose de plus P entier : $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \sigma_q^i$, avec $a_0 a_n \neq 0$. Les coefficients a_i admettent donc un développement en série :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\} \ , \ a_i = \sum_{j \geq 0} a_{i,j} z^j.$$

L'équation caractéristique attachée à la pente 0 est donc : $\overline{P} = a_{n,0} \ s^n + \cdots + a_{0,0}$, et il y a même, par hypothèse, deux indices $\alpha < \beta$ tels que $\overline{P} = a_{\beta,0} \ s^\beta + \cdots + a_{\alpha,0} \ s^\alpha$. On écrit $f = \sum\limits_{m \geq 0} f_m z^m$ la fonction inconnue. Alors :

$$P.f = \sum_{l \geq 0} g_l z^l,$$

où l'on a posé :

$$g_l = \left(\sum_{m=0}^{l} F_{l-m}(q^m) f_m \right) \quad , \quad F_j(X) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j} X^i.$$

Ce polynôme est constitué des coefficients qui contribuent à la tranche d'ordonnée j dans l'intérieur du polygone de Newton. Ainsi $F_0 = \overline{P}$, d'où $F_0(1) = 0$ et $F_0(q^m) \neq 0$ pour $m \geq 1$ (puisque 1 est exposant non résonnant). On trouve les coefficients par récurrence en identifiant les g_l à 0. Comme $F_0(1) = 0$, f_0 est arbitraire et, comme $F_0(q^m) \neq 0$ pour $m \geq 1$, les f_m sont déterminés inductivement de manière unique. $\square$

Lemme 2.2 *Supposons que* 0 *est une pente de* P. *Soit* c *un exposant non résonnant de multiplicité* $m \geq 1$ *attaché à la pente* 0. *On a alors une factorisation :*

$$P = Q.(\sigma_q - c).u_m^{-1} \cdots (\sigma_q - c).u_1^{-1},$$

où $u_1, \ldots, u_m$ *sont des séries formelles telles que* $u_i(0) = 1$. *De plus, le polygone de Newton de* Q *s'obtient en diminuant de* m *la longueur de la pente horizontale de celui de* P : $r_Q = r_P - m\delta_0$, *et les équations caractéristiques correspondantes vérifient :* $\overline{P} = (X - c)^m \overline{Q}$

Preuve. - Traitons d'abord le cas où $c = 1$. Soit $u_1 = f$, la série formelle obtenue au lemme 2.1.. L'opérateur aux q-différences P admet une factorisation :

$$P = P_1.(\sigma_q - 1).u_1^{-1},$$

où l'on a posé :

$$P_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \left(- \sum_{i=0}^{j} a_i \, \sigma_q^i(u_1) \right) \sigma_q^j.$$

Le calcul justificatif figure dans [17] (mais il faut modifier certains indices par suite du changement de convention sur les pentes). Le polygone de Newton de P_1 s'obtient en diminuant de 1 la longueur de la pente horizontale de celui de P : $r_Q = r_P - \delta_0$, et les équations caractéristiques correspondantes vérifient : $\overline{P} = (X-1)\overline{P_1}$. Il suffit alors d'itérer le processus pour obtenir la factorisation :

$$P = Q.(\sigma_q - 1).u_m^{-1} \cdots (\sigma_q - 1).u_1^{-1},$$

où $u_1, \ldots, u_m$ sont des séries formelles telles que $u_i(0) = 1$. De plus, le polygone de Newton de Q s'obtient en diminuant de m la longueur de la pente horizontale de celui de P, autrement dit, $r_Q = r_P - m\delta_0$. Les équations caractéristiques correspondantes vérifient : $\overline{P} = (X-1)^m \overline{Q}$.

Dans le cas d'un exposant c quelconque (non résonnant), soit $u = e_{q,c}$ (cf. §1.4). Alors $P^{[u]}$ vérifie les hypothèses du premier cas. On écrit donc :

$$P^{[u]} = R.(\sigma_q - 1).u_m^{-1} \cdots (\sigma_q - 1).u_1^{-1}.$$

On applique à cette égalité la transformation de jauge de symbole u^{-1}, qui commute au produit, qui n'affecte pas les fonctions u_i et qui transforme $\sigma_q - 1$ en $c^{-1}\sigma_q - 1$. On obtient alors la factorisation voulue en prenant $Q = c^{-m} R^{[u^{-1}]}$. Le reste suit. □

Proposition 2.3 *Soit μ une pente entière de P. Soit c un exposant non résonnant de multiplicité m attaché à la pente μ. On a alors une factorisation :*

$$P = Q.(z^\mu \sigma_q - c).u_m^{-1} \cdots (z^\mu \sigma_q - c).u_1^{-1},$$

où $u_1, \ldots, u_m$ sont des séries formelles telles que $u_i(0) = 1$. De plus, le polygone de Newton de Q s'obtient en diminuant de m la longueur de la pente de valeur μ de celui de P : $r_Q = r_P - m\delta_\mu$, et les équations caractéristiques correspondantes vérifient : $\overline{P}^{(\mu)} = (X-c)^m \overline{Q}^{(\mu)}$.

Preuve. - Soit $u = e_{q,z^{-\mu}}$ (cf. §1.4). Alors $P^{[u]}$ vérifie les hypothèses du lemme 2.2. On écrit donc :

$$P^{[u]} = R.(\sigma_q - c).u_m^{-1} \cdots (\sigma_q - c).u_1^{-1}.$$

On applique à cette égalité la transformation de jauge de symbole u^{-1}, et l'on invoque le §1.4. □

2.2 Factorisation formelle d'un opérateur aux q-différences

Il y a divers énoncés possibles, en voici un :

Proposition 2.4 *Soit μ une pente entière de P. Soient $c_1, \ldots, c_p$ les exposants attachés à la pente μ, et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On suppose les c_i indexés de telle sorte que, si $\frac{c_j}{c_i} = q^l$, $l \in \mathbf{N}^*$, alors $i < j$ (les exposants les moins résonnants sont factorisés à droite les premiers). On a alors une factorisation $P = QR$, où $\mu \notin S(Q)$ et où $R = R_1 \cdots R_p$, avec :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ , \ R_i = (z^\mu \sigma_q - c_i).u_{i,m_i}^{-1} \cdots (z^\mu \sigma_q - c_i).u_{i,1}^{-1},$$

les $u_{i,j}$ étant des séries formelles telles que $u_{i,j}(0) = 1$. On, de plus, $r_R = (m_1 + \cdots + m_p)\delta_\mu$ et $\overline{R}^{(\mu)} = \prod_{i=1}^{p} (X - c_i)^{m_i}$.

Preuve. - Il suffit d'appliquer répétitivement la proposition 2.3. □

On peut donner des conditions plus souples. Pour la résolution (formelle ou convergente), il sera au contraire commode d'être plus rigide et de considérer une classe d'exposants à la fois (modulo $q^{\mathbf{Z}}$). On obtient de la même manière :

Proposition 2.5 *Soit μ une pente entière de P. Soient $c_1, \ldots, c_p$ les exposants d'une même classe modulo $q^{\mathbf{Z}}$ attachés à la pente μ, et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On suppose les c_i indexés de telle sorte que $\epsilon(c_1) < \cdots < \epsilon(c_p)$ (les exposants les moins résonnants sont factorisés les premiers). On a alors une unique factorisation $P = QR$, où aucun exposant attaché à la pente μ de Q n'est congru aux c_i modulo $q^{\mathbf{Z}}$ et où $R = R_1 \cdots R_p$, avec :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ , \ R_i = (z^\mu \sigma_q - c_i).u_{i,m_i}^{-1} \cdots (z^\mu \sigma_q - c_i).u_{i,1}^{-1},$$

les $u_{i,j}$ étant des séries formelles telles que $u_{i,j}(0) = 1$. On, de plus, $r_R = (m_1 + \cdots + m_p)\delta_\mu$ et $\overline{R}^{(\mu)} = \prod_{i=1}^{p} (X - c_i)^{m_i}$.

□

2.3 Factorisation convergente d'un opérateur aux q-différences

Les résultats qui précèdent, ainsi que leur application à la résolution formelle sont dus à Adams. Mais l'énoncé le plus caractéristique de la théorie, le *lemme d'Adams*, est l'existence de *solutions convergentes associées à la dernière pente* ([1], [2]). Il se prouve le plus aisément via la factorisation analytique, bien que celle-ci ait été obtenue ultérieurement (*voir* [4]).

Nous prenons ici pour corps de base $K = \mathcal{M}(\mathbf{C})$ ou $K = \mathbf{C}(\{z\})$. Nous dirons alors qu'une série (resp. une factorisation) est *convergente* si elle définit un élément de K (resp. si tous les facteurs sont à coefficients dans K).

Lemme 2.6 *On reprend d'abord les hypothèses du lemme 2.1, en supposant de plus que* 0 *est la dernière pente, i.e. la plus grande. La série formelle* f *obtenue comme solution est alors convergente.*

Preuve. - Nous commençons par le cas où $K = \mathbf{C}(\{z\})$. Avec les conventions du lemme 2.1, la dernière pente vaut 0, les précédentes sont < 0 et :

$$\begin{cases} \deg \overline{P} = \deg F_0 = n \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \ , \ \deg F_j \leq n \end{cases}$$

Ce qui suit est alors une application de la méthode des séries majorantes. Des conditions sur les degrés et du fait qu'aucun $F_0(q^l)$, $l \geq 1$ ne s'annule, on tire :

$$\exists A > 0 \ : \ \forall l \in \mathbf{N}^* \ , \ \left|F_0(q^l)\right| \geq A \left|q\right|^{ln} .$$

De la convergence des coefficients $a_0, \ldots, a_n$, on tire :

$$\exists B, C > 0 \ : \ \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \forall j \in \mathbf{N} \ , \ |a_{i,j}| \leq BC^j,$$

d'où l'on déduit (avec la condition sur les degrés) :

$$\forall j \in \mathbf{N}^*, \forall l \in \mathbf{N} \ , \ \left|F_j(q^l)\right| \leq (n+1)BC^j \left|q\right|^{ln} .$$

Il vient, pour $l \geq 1$:

$$|f_l| \leq \frac{(n+1)B\left(C \left|q\right|^{(l-1)n} |f_{l-1}| + \cdots + C^l \left|q\right|^{(l-l)n} |f_0|\right)}{A \left|q\right|^{ln}}.$$

On pose $g_l = \frac{|q|^{ln}|f_l|}{C^l}$ et $D = \frac{(n+1)B}{A}$, et l'on a :

$$\begin{cases} g_0 = 1 \\ \forall l \geq 1 \ , \ g_l \leq D(g_0 + \cdots + g_{l-1}) \end{cases}$$

On montre alors par récurrence que $g_l \leq (D+1)^l$, d'où :

$$\forall l \geq 0 \ , \ |f_l| \leq \left(\frac{C(D+1)}{\left|q\right|^n}\right)^l .$$

On a donc bien $f \in \mathbf{C}(\{z\})$.

Supposons maintenant que $K = \mathcal{M}(\mathbf{C})$. Nous appliquons le principe, également caractéristique des équations aux q-différences, selon lequel "l'équation fonctionnelle propage la méromorphie". Nous réécrivons l'équation (1.0.1) sous la forme :

$$f(z) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{n-i}(q^{-n}z)}{a_n(q^{-n}z)} f(q^{-i}z).$$

Si f est définie et méromorphe dans un disque de centre 0 et de rayon $r > 0$, et qu'elle y vérifie cette équation, la même formule permet de la prolonger en une fonction méromorphe sur le disque de centre 0 et de rayon $|q|\, r$, qui y vérifie la même équation. On obtient ainsi (puisque $|q| > 1$) un prolongement à $\mathbf{C}$ tout entier. $\square$

Lemme 2.7 *On reprend les hypothèses du lemme 2.2 en supposant de plus que μ est la dernière pente. Les factorisations obtenues sont convergentes.*

Preuve. - En effet, seul le calcul de P_1 dans la première étape est non formel, et il est clair qu'il fournit un polynôme en σ_q à coefficients convergents. $\square$

Théorème 2.8 *(Birkhoff-Guenther) On reprend les hypothèses des propositions 2.4 et 2.5, en supposant de plus que μ est la dernière pente. Les factorisations obtenues sont alors convergentes.*

Preuve. - Encore une fois, il suffit de rassembler les morceaux. $\square$

Remarque 2.9 Le rayon de convergence garanti par la preuve du lemme 2.6 est $\frac{|q|}{C(D+1)}$: le numérateur dépend de q seul, le dénominateur de l'équation seule. Notons par ailleurs que cette preuve est le seul point qui dépend de l'hypothèse $|q| > 1$.

3 Solutions formelles et solutions convergentes

Dans toute cette section, les pentes μ seront des entiers. D'après ce qui précède, nous sommes conduits à nous intéresser à l'équation avec second membre :

$$z^{\mu}\sigma_q f - cf = \phi.$$

La transformation de jauge (cf le §1.4) $f = ug$, où l'on choisit u (dans le catalogue des fonctions de base) tel que $\sigma_q u = cz^{-\mu}u$, nous ramène à l'équation :

$$\sigma_q g - g = \gamma := \phi/cu.$$

Si l'on adopte l'analogie habituelle avec le cas différentiel :

$$\frac{\sigma_q - 1}{q-1} \longleftrightarrow z\frac{d}{dz},$$

on est conduit à considérer cette dernière résolution comme une *q-intégration*. Comme dans le cas différentiel, la constante 1 n'est pas q-intégrable et nécessite l'introduction du q-logarithme.

3.1 q-intégration

Soit π_0 le projecteur du $\mathbf{C}$ espace vectoriel $\mathbf{C}((z))$ qui associe à toute série de Laurent formelle son terme constant. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ et $\mathbf{C}(\{z\})$ sont stables, d'où, quelque soit le corps K, une décomposition :

$$K = \mathbf{C} \oplus K^{\bullet}, \text{ où } K^{\bullet} = (\text{Ker } \pi_0) \cap K.$$

L'endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire $\sigma_q - 1$ de K est nul sur la première composante et laisse stable la seconde.

Lemme 3.1 *L'endomorphisme $\sigma_q - 1$ induit un automorphisme de $K^{\bullet}$.*

Preuve. - En effet, on peut poser (dans $\mathbf{C}((z))^{\bullet}$) :

$$I_q \left(\sum_{i \neq 0} a_i z^i \right) = \sum_{i \neq 0} \frac{a_i}{q^i - 1} z^i,$$

définissant un inverse. Il est clair que celui-ci préserve, le cas échéant, la méromorphie près de 0 ou sur $\mathbf{C}$. □

On introduit donc maintenant un élément l_q de L tel que $\sigma_q l_q = l_q + 1$ (voir dans l'introduction les conventions générales). Noter d'ailleurs que, d'après le calcul ci-dessus, on ne peut trouver un tel élément dans K. On note de plus, pour tout entier naturel k :

$$l_q^{(k)} = \binom{l_q}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (l_q - i),$$

et $l_q^{(k)} = 0$ pour $k < 0$, de sorte que (calcul facile) :

$$\forall k \in \mathbf{Z} \ , \ \sigma_q l_q^{(k)} = l_q^{(k)} + l_q^{(k-1)}.$$

Lemme 3.2 *Les $l_q^{(k)}$, $k \geq 0$, sont linéairement indépendants sur K ; autrement dit, l_q est transcendant et :*

$$K[l_q] = \bigoplus_{k \geq 0} K l_q^{(k)}.$$

Preuve. - Soit en effet une relation :

$$l_q^{(k+1)} = a_0 \, l_q^{(0)} + \cdots + a_k \, l_q^{(k)}, \quad \text{les } a_i \in K,$$

avec $k \geq 0$ le plus petit possible ; il est donc en fait ≥ 1 puisque $l_q \notin K$. En appliquant $\sigma_q - 1$, à cette relation, on trouve :

$$l_q^{(k)} \equiv (\sigma_q a_k - a_k) l_q^{(k)} \quad (\text{mod } K l_q^{(0)} + \cdots + K l_q^{(k-1)}).$$

Par minimalité, on en déduit que $\sigma_q a_k - a_k = 1$, ce qui est impossible. □

Proposition 3.3 *On a, pour tout entier naturel non nul k, une suite exacte :*

$$0 \to \mathbf{C} \to K_k[l_q] \stackrel{\sigma_q - 1}{\longrightarrow} K_{k-1}[l_q] \to 0.$$

Preuve. - Ici, $K_k[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré $\leq k$. Ecrivons $f = f_0 l_q^{(0)} + \cdots + f_k l_q^{(k)}$ et $g = g_0 l_q^{(0)} + \cdots + g_{k-1} l_q^{(k-1)}$ des éléments respectifs de $K_k[l_q]$ et de $K_{k-1}[l_q]$. Par identification, l'équation $(\sigma_q - 1)f = g$ équivaut à :

$$\forall i \geq 0 \ , \ g_i = \sigma_q f_i - f_i + \sigma_q f_{i+1}.$$

(On convient que $f_i = 0$ pour $i > k$ et que $g_i = 0$ pour $i > k-1$.) La résoudre revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sigma_q f_0 - f_0 + \sigma_q f_1 = g_0 \\ \vdots \\ \sigma_q f_i - f_i + \sigma_q f_{i+1} = g_i \\ \vdots \\ \sigma_q f_{k-1} - f_{k-1} + \sigma_q f_k = g_{k-1} \\ \sigma_q f_k - f_k = 0 \end{cases}$$

On voit, en commençant par le bas, que $f_k \in \mathbf{C}$ et même (avant-dernière équation) que c'est nécessairement $\pi_0(g_{k-1})$. On a alors la résolution itérative :

$$\begin{array}{rcl} f_k & = & \pi_0(g_{k-1}) \\ & \vdots & \\ f_i & = & \pi_0(g_{i-1}) + I_q(g_i - \sigma_q f_{i+1}) \\ & \vdots & \\ f_0 & = & \text{une constante arbitraire } + I_q(g_0 - \sigma_q f_1) \end{array}$$

□

3.2 Equations d'ordre 1 avec second membre

On se restreint dorénavant à la sous-algèbre S de L engendrée par les fonctions élémentaires :

$$S = K[(e_{q,cz^\mu})_{(c,\mu) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}}, l_q].$$

Notons provisoirement $C(S)$ l'ensemble de tous les q-caractères :

$$C(S) = \{u \in S - \{0\} \mid \exists c \in \mathbf{C}^* \ : \ \sigma_q u = cu\}.$$

On a une décomposition [3] :

$$S = \sum_{\mu \in \mathbf{Z}} S_\mu, \quad \text{où} \quad S_\mu = \sum_{u \in C(S)} u \Theta_q^{-\mu} K[l_q].$$

[3] Cette décomposition possède d'intéressantes propriétés algébriques, partiellement abordées dans [9] (cas formel) et [16] (cas convergent).

La formule, immédiatement vérifiée :

$$\sigma_q u = cu \Rightarrow (dz^\nu \sigma_q - 1)(u\Theta_q^{-\mu} F) = u\Theta_q^{-\mu}(cdz^{\nu-\mu}\sigma_q - 1)F$$

implique que l'endomorphisme $\Phi_{d,\nu} = dz^\nu \sigma_q - 1$ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel S laisse stable chaque sous-espace $u\Theta_q^{-\mu} K[l_q]$ (et donc, en particulier, $K[l_q]$. De plus, l'isomorphisme $F \mapsto u\Theta_q^{-\mu} F$ de $K[l_q]$ dans $u\Theta_q^{-\mu} K[l_q]$ conjugue l'action de $\Phi_{cd,\nu-\mu}$ sur le premier avec l'action de $\Phi_{d,\nu}$ sur le deuxième. Notre but, dans ce paragraphe, est de préciser l'image et le noyau de ces endomorphismes.

Lemme 3.4 *Soit $(c, \mu) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{Z}$. Il est clair que K est stable par $\Phi_{c,\mu}$.*
(i) Si $(\overline{c}, \mu) \neq (1, 0)$, la restriction de $\Phi_{c,\mu}$ à K est injective.
(ii) Elle est de plus surjective dans chacun des cas suivants :

1. *$\mu = 0$ et $\overline{c} \neq 1$.*
2. *$\mu < 0$.*
3. *$\mu > 0$ et $K = \mathbf{C}((z))$.*

Preuve. - Soit $\mu = 0$. Nous écrirons $f = \sum\limits_{k>>-\infty} f_k z^k$ et $g = \sum\limits_{k>>-\infty} g_k z^k$ pour rappeler que les séries f et g n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls d'indice négatif. On a l'équivalence :

$$(c\sigma_q - 1)f = g \Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ (cq^k - 1)f_k = g_k,$$

qui suffit à montrer (i) et (ii) dans ce cas (c'est l'hypothèse $\overline{c} \neq 1$ qui garantit que $cq^k - 1$ ne s'annule pas).

Si $\mu \neq 0$, posons $\mu = m\epsilon$, avec $m = |\mu|$ et $\epsilon = \pm 1$. La décomposition :

$$\mathbf{C}((z)) = \bigoplus_{0 \leq i < m} z^i \mathbf{C}((z^m))$$

induit des décompositions similaires de $\mathbf{C}(\{z\})$ et de $\mathcal{M}(\mathbf{C})$, et l'on écrira, dans tous les cas :

$$K = \bigoplus_{0 \leq i < m} K_{i,m}.$$

La formule (facile à vérifier) :

$$(cz^\mu \sigma_q - 1) z^i F(z^m) = z^i (cq^i z^{m\epsilon} F(q^m z^m) - F(z^m))$$

montre que chaque composante est stable. Ecrivant alors $Z = z^m$, $Q = q^m$, $C = cq^i$, $f(z) = z^i F(z^m)$ et $g(z) = z^i G(z^m)$, on obtient, en se restreignant à $K_{i,m}$, l'équivalence :

$$(cz^\mu \sigma_q - 1)f = g \Leftrightarrow CZ^\epsilon F(QZ) - F(Z) = G(Z).$$

Autrement dit, on s'est ramené au cas où $\mu = \pm 1$, ce que l'on suppose maintenant. On reprend les notations $f = \sum\limits_{k>>-\infty} f_k z^k$ et $g = \sum\limits_{k>>-\infty} g_k z^k$.

Si $\mu = -1$, on obtient les équivalences :

$$\begin{aligned}(cz^{-1}\sigma_q - 1)f = g &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ cq^{k+1}f_{k+1} - f_k = g_k \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ c^{k+1}q^{k(k+1)/2}f_{k+1} - c^k q^{k(k-1)/2}f_k = c^k q^{k(k-1)/2}g_k \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ c^k q^{k(k-1)/2}f_k = \sum_{i<k} c^i q^{i(i-1)/2}g_i\end{aligned}$$

Ceci montre que $\Phi_{c,-1}$ est bijectif dans le cas formel. Dans le cas convergent, la relation :

$$|c^k f_k| \leq \sum_{i<k} |c^i g_i|$$

entraine que la série $f(cz)$ est dominée par la série $\frac{g(cz)}{1-z}$, ce qui permet encore de conclure.

Si $\mu = +1$, on obtient les équivalences :

$$\begin{aligned}(cz\sigma_q - 1)f = g &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ cq^{k-1}f_{k-1} - f_k = g_k \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ \frac{f_{k-1}}{(c/q)^{k-1}q^{k(k-1)/2}} - \frac{f_k}{(c/q)^k q^{k(k+1)/2}} = \frac{g_k}{(c/q)^k q^{k(k+1)/2}} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ \frac{f_k}{(c/q)^k q^{k(k+1)/2}} = -\sum_{i<k} \frac{g_i}{(c/q)^i q^{i(i+1)/2}}\end{aligned}$$

Ceci montre que $\Phi_{c,1}$ est bijectif dans le cas formel. □

Dans le cas convergent avec $\mu > 0$, on ne peut pas en général conclure, les coefficients f_k pouvant être très rapidement croissants. Par exemple, si $c = 1$ et $g = -1$, on trouve, pour $k > 0$, $f_k = q^{k(k-1)/2}$. C'est un q-analogue de la série d'Euler, la série de Tshakaloff. Pour un g plus général, il y a une condition explicite pour l'existence d'une solution convergente.

On va maintenant étudier l'action de $\Phi_{c,\mu}$ sur $K[l_q]$. Le cas où $(c, \mu) = (1, 0)$ a fait l'objet du §3.1. Le cas où $(\overline{c}, \mu) = (1, 0)$ s'y ramène car l'automorphisme $F \mapsto z^l F$ de $K[l_q]$ conjugue $\Phi_{c,\mu}$ avec $\Phi_{q^l c,\mu}$.

Lemme 3.5 *On suppose $(\overline{c}, \mu) \neq (1, 0)$. Les conclusions sont les mêmes que précédemment : la restriction de $\Phi_{c,\mu}$ à $K[l_q]$ est injective ; elle est de plus surjective, sauf dans le cas convergent si $\mu > 0$.*

Preuve. - Ecrivant $f = \sum_{i\geq 0} f^{(i)} l_q^{(i)}$ et $g = \sum_{i\geq 0} g^{(i)} l_q^{(i)}$ (qui sont des sommes finies), on obtient l'équivalence :

$$(cz^\mu \sigma_q - 1)f = g \Leftrightarrow \forall i \geq 0\ ,\ (cz^\mu \sigma_q - 1)f^{(i)} = g^{(i)} - cz^\mu \sigma_q f^{(i+1)}.$$

Ce système se résoud itérativement, en commençant par la fin, à l'aide du lemme 3.4. □

Corollaire 3.6 *On considère la restriction de $\Phi_{d,\nu}$ à $u\Theta_q^{-\mu}K[l_q]$, où $\sigma_q u = cu$.*
(i) Si $cd = q^l, l \in \mathbf{Z}$, et si $\mu = \nu$, cet endomorphisme est surjectif de noyau $\mathbf{C}u\Theta_q^{-\mu}z^{-l}$.
(ii) Si $\overline{cd} \neq 1$ et $\mu = \nu$, ou bien si cd est quelconque et $\nu < \mu$, l'endomorphisme est bijectif.
(iii) Même conclusion dans le cas formel si $\nu > \mu$.

Preuve. - C'est immédiat par conjugaison (voir le début du §3.2). □

Nous synthétisons maintenant les résultats les plus importants :

Théorème 3.7 *L'endomorphisme $\Phi_{d,\nu}$ de S_μ est surjectif si $\nu \leq \mu$, et aussi si $\nu > \mu$ dans le cas formel.*

□

3.3 Résolution formelle

Définition 3.8 Soient $f_1, \ldots, f_m$ des éléments de L. Leur q-Wronskien (ou Casoratien, ou Pochhammerien) est :

$$W_q(f_1, \ldots, f_m) = \det \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_j & \ldots & f_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_q^i f_1 & \ldots & \sigma_q^i f_j & \ldots & \sigma_q^i f_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_q^{m-1} f_1 & \ldots & \sigma_q^{m-1} f_j & \ldots & \sigma_q^{m-1} f_m \end{pmatrix}$$

Rappelons (cf. l'introduction) que l'on note $C_L = L^{\sigma_q}$ le sous-corps des constantes de L. Dans ces conditions, on a le :

Lemme 3.9 *Le q-Wronskien $W_q(f_1, \ldots, f_m)$ est non nul si et seulement si les f_i sont linéairement indépendants sur C_L.*

Preuve. - Ce lemme est démontré dans [5]. La partie "seulement si" est d'ailleurs évidente. □

Lemme 3.10 *Le nombre de solutions indépendantes de l'équation (1.0.1) ne peut excéder n, l'ordre de l'équation.*

Preuve. - Soient en effet $f_1, \ldots, f_{n+1}$ des solutions de l'équation (1.0.1). Les lignes $L_i = (\sigma_q^i f_1, \ldots, \sigma_q^i f_{n+1})$ sont alors liées par la relation linéaire non triviale $a_n L_n + \cdots + a_0 L_0$, et $W_q(f_1, \ldots, f_{n+1}) = 0$; on conclut alors grâce au lemme 3.9. □

Notre but est de construire une famille aussi grande que possible de solutions indépendantes de l'équation (1.0.1). Voici un cas optimal :

Théorème 3.11 *Dans le cas formel, on peut construire n solutions indépendantes.*

Preuve. - Elle se fait par récurrence sur l'ordre de l'opérateur P ; l'algorithme correspondant est récursif. On exploite naturellement les résultats sur la factorisation de la section 2 et ceux sur les équations du premier ordre avec second membre du §3.1.

Si $n = 1$, on peut écrire $P = a(z^\mu \sigma_q - c)u^{-1}$, et $ue_{q,c}\Theta_q^{-\mu}$ est une solution non nulle.

Si P est d'ordre $n = m + 1 \geq 2$, on écrit $P = a(z^\mu \sigma_q - c)u^{-1}Q$, où Q est d'ordre m. Par hypothèse de récurrence, il y a m solutions indépendantes $f_1, \ldots, f_m$ de Q. D'après le théorème 3.7, il existe $f \in L$ tel que $Qf = ue_{q,c}\Theta_q^{-\mu}$. Il est clair que $f, f + f_1, \ldots, f + f_m$ sont solutions de P.

Le déterminant étant une forme multilinéaire alternée, le q-Wronskien de $f, f + f_1, \ldots, f + f_m$ est égal à celui de $f, f_1, \ldots, f_m$. On manipule les lignes de ce dernier : on remplace L_m par $b_m L_m + \cdots + b_0 L_0$, où $Q = b_m \sigma_q^m + \cdots + b_0$, ce qui multiplie le déterminant par b_m. Mais cette opération remplace aussi la dernière ligne par $(Qf, Qf_1, \ldots, Qf_m) = (Qf, 0, \ldots, 0)$. Le coefficient Qf vaut $ue_{q,c}\Theta_q^{-\mu}$, qui est inversible, et son cofacteur est le q-wronskien de $(f_1, \ldots, f_m)$. On obtient ainsi la formule :

$$W_q(f, f + f_1, \ldots, f + f_m) = \frac{1}{b_m} ue_{q,c}\Theta_q^{-\mu} W_q(f_1, \ldots, f_m).$$

Il est donc non nul, ce qui achève la preuve. □

3.4 Résolution analytique

On se place ici dans le cas convergent. Si l'on reprend la factorisation $P = a(z^\mu \sigma_q - c)u^{-1}Q$ exploitée au §3.3, on constate que l'on n'a la garantie d'une factorisation convergente que si toutes les pentes de Q sont $\leq \mu$ (cf. le théorème 2.8). Mais, si l'une d'elles est $< \mu$, le théorème 3.7 ne s'applique pas. Ainsi, la méthode du §3.3 ne s'applique à la résolution convergente que si $S(P) = \{\mu\}$, autrement dit, si P est *pur*. On ne peut donc espérer trouver n solutions indépendantes en général.

Théorème 3.12 (Lemme d'Adams) *Soit μ_k la dernière pente de P. L'équation (1.0.1) admet alors $r_P(\mu_k)$ solutions convergentes indépendantes.*

Preuve. - On déduit en effet du §3.3 une factorisation $P = QR$ avec R pur de pente μ_k et d'ordre $r_P(\mu_k)$. On applique alors à R la méthode du §3.3 (on est dans la cas (i) du théorème 3.7). □

L'exemple de l'équation $(\sigma_q - 1)(z\sigma_q - 1)f = 0$ montre que l'on ne peut espérer mieux en général.

4 Calculs d'indices

Soit $P \in \mathcal{D}_{q,K}$. Les questions d'existence et d'unicité des solutions de l'équation $P.f = 0$ peuvent se traduire en terme de surjectivité et d'injectivité de l'application $f \mapsto P.f$ de K dans lui-même. Nous noterons encore P cette application, qui est un endomorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel K. À défaut de ces propriétés optimales (surjectivité, injectivité), qui équivalent à la nullité du conoyau ou du noyau de P, on peut tenter de calculer la dimension de ces deux $\mathbf{C}$-espaces vectoriels. Nous verrons que ces dimensions sont finies (hors les cas triviaux où P est nul ou inversible). Le calcul de ces dimensions est d'ailleurs par lui-même important pour les questions de classification [15], où il est fait par d'autres méthodes, combinant l'algèbre homologique et l'analyse fonctionnelle (sous la forme de résultats dûs à Bézivin [3] et à Ramis [11]).

4.1 Noyau et conoyau de $\sigma_q - u$

Nous commencerons par le cas d'un opérateur de degré 1. À un facteur inversible près dans $\mathcal{D}_{q,K}$, on peut supposer que $P = \sigma_q - u$, où l'on écrit $u = dq^k z^\nu v$, $v \in K$, $v(0) = 1$, avec $k \in \mathbf{Z}$ et $d \in \mathbf{C}^*$ tel que $1 \leq |d| < |q|$.

Lemme 4.1 *(i) Les dimensions du noyau et du conoyau de $\sigma_q - u$ ne dépendent que de la classe de $u \in K^*$ modulo le sous-groupe $\{\frac{\sigma_q(w)}{w} \mid w \in K^*\}$ de K^*.*
(ii) Modulo ce sous-groupe, u est équivalent à dz^ν.

Preuve. - On conjugue l'endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire $\sigma_q - u$ de K par $w \in K^*$, identifié à l'automorphisme $\times w$. On trouve :

$$w \circ (\sigma_q - u) \circ w^{-1} = \frac{w}{\sigma_q(w)} \circ (\sigma_q - u'), \text{ avec } u' = u\frac{\sigma_q(w)}{w}.$$

Ceci établit (i).
On vérifie que $q^k v = \frac{\sigma_q(w)}{w}$, où $w = z^k \prod\limits_{i \geq 1} \sigma_q^{-i}(v) \in K$ (et que cela marche dans le cas convergent), ce qui prouve (ii). □

On peut donc supposer que $u = dz^\nu$, ce que nous ferons désormais.

Lemme 4.2 *Le noyau de $\sigma_q - u : K \to K$ est de dimension 1 si $(\nu, d) = (0, 1)$, nul sinon.*

Preuve. - La série $f = \sum f_n z^n$ appartient au noyau si et seulement si $\forall n$, $q^n f_n = df_{n-\nu}$. S'agissant de séries de Laurent, cela entraine $f = 0$ sauf peut-être si $\nu = 0$. Dans ce dernier cas, cela entraine $f = 0$, sauf peut-être si $d \in q^{\mathbf{Z}}$. Vue la condition sur $|d|$, ceci n'est possible que si $d = 1$, donc $u = 1$. Dans ce cas, le noyau est $\mathbf{C}$. □

Lemme 4.3 *L'application $\sigma_q - u : K \to K$ est surjective si $\nu > 0$ et si $\nu = 0,\ d \neq 1$.*

Preuve. - Soit $g \in K$. On veut résoudre (en f) $\sigma_q f - dz^\nu f = g$ dans K. Cette équation équivaut à $\forall n\ ,\ q^n f_n - df_{n-\nu} = g_n$, soit encore $\forall n\ ,\ f_n = q^{-n}(df_{n-\nu} + g_n)$. Si $\nu \geq 1$, on peut calculer les coefficients f_n par récurrence à partir des ν premiers d'entre eux. De plus, dans le cas convergent, la forme des dénominateurs montre que la série f obtenue converge si g converge, et l'équation fonctionnelle garantit la méromorphie s'il y a lieu. Si $\nu = 0$ et $d \neq 1$ (donc en fait $d \notin q^{\mathbf{Z}}$), on obtient directement $f_n = \frac{g_n}{q^n - d}$. La convergence (resp. la méromorphie) est encore immédiate le cas échéant.
Variante lorsque $\nu \geq 1$: On doit résoudre l'équation au point fixe $F(f) = f$, où $F(f) := \sigma_q^{-1}(g + dz^\nu f)$. Il est facile de voir que cet opérateur est contractant à la fois pour la topologie z-adique et pour la topologie transcendante. □

Lemme 4.4 *Si $(\nu, d) = (0, 1)$, le conoyau de $\sigma_q - u : K \to K$ est de dimension 1.*

Preuve. - Il est facile de voir que $\sigma_q - u$ annule $\mathbf{C}$ et induit un automorphisme du sous $\mathbf{C}$-espace vectoriel $K^\bullet$ de K formé des séries sans terme constant. □

Lemme 4.5 *On suppose $\nu < 0$. Alors $\sigma_q - u : K \to K$ est surjectif dans le cas formel.*

Preuve. - On pose $F'(f) = d^{-1}z^{-\nu}(\sigma_q(f) - g)$. Comme $\nu > 0$, cet opérateur est z-adiquement contractant, d'où l'existence et l'unicité d'un point fixe dans le cas formel. □

Remarque 4.6 C'est le premier endroit où le cas formel et le cas convergent diffèrent. L'opérateur F' est (fortement) *dilatant* pour la topologie transcendante, il produit des Stokes. C'est donc ici qu'un argument analytique va être nécessaire dans le cas convergent.

Lemme 4.7 *On suppose $\nu = -1$. Alors, dans le cas convergent, le conoyau de $\sigma_q - u : K \to K$ est de dimension 1.*

Preuve. - Remarquons d'abord que l'automorphisme $\mathbf{C}$-linéaire $f(z) \mapsto f(dz)$ de K conjugue $\sigma_q - dz^{-1}$ à $\sigma_q - z^{-1}$. On peut donc supposer $d = 1$ et $u = z^{-1}$, ce que nous ferons. Par ailleurs, l'endomorphisme $\sigma_q - z^{-1}$ a le même conoyau que $1 - z\sigma_q$ et nous considèrerons plutôt ce dernier. On prendra $K = \mathbf{C}(\{z\})$, l'autre cas s'en déduisant comme d'habitude.

On considère la *transformation de q-Borel-Ramis* définie par :

$$\mathcal{B}_{q,1} : \sum f_n z^n \mapsto \sum \frac{f_n}{q^{n(n-1)/2}} z^n, \tag{4.7.1}$$

qui envoie $\mathbf{C}(\{z\})$ sur l'espace $\mathbf{C}(\{z\})_1$ des séries q-Gevrey de niveau 1 (*voir* [11]), c'est à dire les $\sum \phi_n z^n$ telles qu'il existe $A > 0$ tel que $\phi_n = O(A^n q^{-n(n-1)/2})$ lorsque $n \to \infty$. L'interêt est que la transformation $\mathcal{B}_{q,1}$ conjugue $1 - z\sigma_q$ à la multiplication par $1 - z$, d'où le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}(\{z\}) & \xrightarrow{1-z\sigma_q} & \mathbf{C}(\{z\}) \\ {\scriptstyle \mathcal{B}_{q,1}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{B}_{q,1}} \\ \mathbf{C}(\{z\})_1 & \xrightarrow{\times(1-z)} & \mathbf{C}(\{z\})_1 \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes.
D'autre part, l'image de la flèche du bas est exactement formée des séries telles que $\phi(1) = 0$. En effet, l'une des inclusions est évidente. Pour prouver l'autre, on prend $\phi \in \mathbf{C}(\{z\})_1$ tel que $\phi(1) = 0$. On pose $\gamma_n = \sum\limits_{k \leq n} \phi_k$, de sorte que $\gamma(z) = \sum \gamma_n z^n \in \mathbf{C}(\{z\})$ est égal à $\frac{1}{1-z}\phi(z)$ et il reste à vérifier la condition q-Gevrey sur γ. Mais la condition $\phi(1) = 0$ entraine $\gamma_n = -\sum\limits_{k>n} \phi_k$. Soient $C, A > 0$ tels que $\forall n$, $|\phi_n| \leq CA^n |q^{-n(n-1)/2}|$. Alors, pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq \sum_{k>n} |\phi_k| \\ &\leq CA^n \, |q|^{-n(n-1)/2} \sum_{l>0} A^l \, |q|^{-l(2n+l-1)/2} \\ &\leq C'A^n \, |q|^{-n(n-1)/2}, \text{ où } C' = C \sum_{l>0} A^l \, |q|^{-l(l-1)/2} < \infty, \end{aligned}$$

d'où l'estimation q-Gevrey voulue. L'image de la flèche du bas est donc supplémentaire de $\mathbf{C}$ et le conoyau a bien pour dimension 1. □

Lemme 4.8 *On suppose $\nu = -r, r \in \mathbf{N}^*$. Alors, dans le cas convergent, le conoyau de $\sigma_q - u : K \to K$ est de dimension r.*

Preuve. - On peut évidemment supposer $r \geq 2$. Notons provisoirement K' le sous-corps de K formé des fonctions de z^r, d'où une décomposition :

$$K = K' \oplus zK' \oplus \cdots \oplus z^{r-1}K',$$

dans laquelle chaque sous-espace $z^i K'$ est stable par $\sigma_q - u$. De plus, on a un isomorphisme $f(z) \mapsto z^i f(z^r)$ de K avec $z^i K'$, qui conjugue $q^i \sigma' - dz^{-1}$ à $\sigma_q - u$, où l'on a introduit $\sigma' : f(z) \mapsto f(q^r z)$. On applique alors le lemme précédent. □

Nous résumons ainsi nos résultats :

Proposition 4.9 *Soit $u = dz^\nu v$, $v \in K$, $v(0) = 1$, avec $d \in \mathbf{C}^*$. Notons $\overline{d}$ la classe de d modulo $q^{\mathbf{Z}}$. L'opérateur $\mathbf{C}$-linéaire $\sigma_q - u : K \to K$ est à indice. Les dimensions de son noyau et de son conoyau et son indice sont donnés par le* *tableau suivant :*

$(\nu, \overline{d})$	*Noyau*	*Conoyau*	*Indice*
$(0,1)$	1	1	0
$(0,\neq 1)$	0	0	0
$(>0,-)$	0	0	0
$(<0,-)$	0	$\begin{cases} 0 \text{ (cas formel)} \\ -\nu \text{ (cas convergent)} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \text{ (cas formel)} \\ \nu \text{ (cas convergent)} \end{cases}$

□

4.2 Indices et conoyaux

Il n'y a pas en général de formule simple donnant la dimension du noyau et du conoyau de P. Cependant, si toutes les pentes de P sont entières, nous savons qu'il est produit d'opérateurs de degré 1 et l'on peut déduire de la proposition 4.9 et de l'algèbre linéaire les faits suivants :

1. L'application $\mathbf{C}$-linéaire $P : f \mapsto P.f$ de K dans lui-même est *à indice*, autrement dit, son noyau et son conoyau sont de dimension finie.
2. L'*indice* de P, c'est-à-dire (par définition) l'entier $\chi(P) := \dim \mathrm{Ker}\ P - \dim \mathrm{Coker}\ P$ est la somme des indices des facteurs de P.

En particulier, si P est pur de pente $\mu \in \mathbf{Z}$ *supposée non nulle*, tous ses facteurs sont de la forme $(z^\mu \sigma_q - c).u$. Dans le cas formel, ils sont tous bijectifs de K dans K d'après la proposition 4.9, et P l'est donc également. Dans le cas convergent, chacun des $(z^\mu \sigma_q - c).u$ étant injectif (toujours d'après la proposition 4.9), il en est de même de P. Par additivité de l'indice, on en déduit, *sans avoir à supposer la pente entière* :

Corollaire 4.10 *Soit P un opérateur d'ordre n pur de pente $\mu \neq 0$.*
(i) Dans le cas formel, on a $\dim \mathrm{Ker}\ P = \dim \mathrm{Coker}\ P = 0$.
(ii) Dans le cas convergent, on a $\dim \mathrm{Ker}\ P = 0$ et $\dim \mathrm{Coker}\ P = n \max(0, \mu)$.

Preuve. - Cela découle des arguments précédents si la pente est entière. Le cas général s'y ramène par ramification ; les détails sont laissés au lecteur. □

Nous allons maintenant traduire ce résultat en termes de systèmes, ce qui permettra de donner une description plus concrète du conoyau. (Le but de cette article étant de donner des descriptions concrètes !) Pour cela, nous allons d'abord décrire le lien entre équations et systèmes aux q-différences.

Nous partons, pour simplifier, de l'opérateur $P := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sigma_q^i$, que nous supposons unitaire : $a_n = 1$ (et, bien entendu, $a_0 \neq 0$). Comme on le fait pour les équations différentielles, nous allons *vectorialiser* le problème. Nous notons :

$$X := \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \\ \vdots \\ \sigma_q^{n-2} f \\ \sigma_q^{n-1} f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a $A \in GL_n(K)$ car $\det A = (-1)^n a_0$. Il est immédiat que $P.f = 0 \Leftrightarrow \sigma_q X = AX$, ce qui montre comment on transforme une équation scalaire d'ordre n en système de rang n. Pour expliquer la réciproque, nous devons introduire la notion de *transformation de jauge*. Les systèmes de rang n de matrices $A, B \in GL_n(K)$ sont dits équivalents si l'on peut transformer la relation $\sigma_q X = AX$ en la relation $\sigma_q Y = BY$ par un changement de variables $Y = FX$, avec $F \in GL_n(K)$, ce qui équivaut à la relation :

$$B = F[A] := (\sigma_q F) A F^{-1}.$$

(Dans $\sigma_q F$, comme dans $\sigma_q X$, on applique σ_q à chaque coefficient.) Enfin, dernière étape du raisonnement, le *lemme du vecteur cyclique*, dû à Birkhoff, dit que tout système de rang n est équivalent au système provenant d'une équation d'ordre n par vectorialisation ; pour une preuve à la main, voir [16] ; pour une preuve algébrique très générale, voir [5].

La relation entre solutions de $P.f = 0$ et solutions de $\sigma_q X = AX$ peut être précisée en une relation entre des noyaux et une relation entre des conoyaux. Plus précisément, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{P} & K \\ {\scriptstyle u}\Big\downarrow & & {\scriptstyle v}\Big\downarrow \\ K^n & \xrightarrow{\sigma_q - A} & K^n \end{array} \quad \text{où } u : f \mapsto \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \\ \vdots \\ \sigma_q^{n-2} f \\ \sigma_q^{n-1} f \end{pmatrix} \text{ et } v : f \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

La flèche horizontale du bas est l'application $X \mapsto \sigma_q X - AX$. Le lecteur vérifiera que ce diagramme induit des isomorphismes $\text{Ker } P \simeq \text{Ker } (\sigma_q - A)$ et $\text{Coker } P \simeq \text{Coker } (\sigma_q - A)$.

De même, la relation entre solutions de $\sigma_q X = AX$ et solutions de $\sigma_q Y = BY$ lorsque $B = F[A]$ peut être précisée en une relation entre des noyaux et une relation entre des conoyaux. Plus précisément, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{\sigma_q - A} & K^n \\ {\scriptstyle F}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \sigma_q F}\Big\downarrow \\ K^n & \xrightarrow{\sigma_q - B} & K^n \end{array},$$

qui fournit (encore plus facilement) des isomorphismes Ker $(\sigma_q - A) \simeq$ Ker $(\sigma_q - B)$ et Coker $(\sigma_q - A) \simeq$ Coker $(\sigma_q - B)$.

Enfin, il est démontré dans [16] que la matrice provenant par vectorialisation d'un opérateur P pur et de pente μ *supposée entière* est équivalente à une matrice de la forme $A = z^\mu A_0$, où $A_0 \in GL_n(\mathbf{C})$. Nous sommes donc conduits à étudier le noyau et le conoyau de l'application $X \mapsto \sigma_q X - z^\mu A_0 X$ de K^n dans lui-même. On suppose encore $\mu \neq 0$. Il est alors immédiat que cette application est injective, dans le cas formel comme dans le cas convergent : la relation $\sigma_q X = z^\mu A_0 X$ pour une série $X = \sum X_k z^k$ équivaut à la relation de récurrence $q^k X_k = A_0 X_{k-\mu}$; pour une série X non nulle, cela n'est possible que si cette série admet une infinité de termes non triviaux d'exposants négatifs, ce qui n'est pas autorisé dans K.

Exercice. - En s'inspirant du corollaire 4.10, prédire les dimensions de Ker $(\sigma_q - z^\mu A_0)$ et de Coker $(\sigma_q - z^\mu A_0)$ dans le cas formel et dans le cas convergent, pour $\mu > 0$ et pour $\mu < 0$.

Supposons $\mu > 0$. L'application $\sigma_q - A$ est alors surjective aussi bien dans le cas formel que dans le cas convergent. En effet :

$$\sigma_q X - z^\mu A_0 X = Y \Longleftrightarrow X = \sigma_q^{-1} Y + (z/q)^\mu A_0 \sigma_q^{-1} X,$$

que l'on peut considérer comme une équation au point fixe, dont l'unique solution formelle est :

$$X = \sum_{k \geq 1} q^{-\mu k(k+1)/2} z^{\mu k} A_0^k \sigma_q^{-k-1} Y.$$

Il n'est en effet pas difficile de voir que l'on a itéré un opérateur contractant pour la distance z-adique, et que la sommation ci-dessus converge formellement. Mais c'est également un exercice élémentaire (par exemple avec des séries majorantes) que, si Y converge dans un disque, alors X converge dans ce disque.

Supposons maintenant $\mu < 0$. L'application $\sigma_q - A$ est alors surjective dans le cas formel. En effet, notant $d := -\mu \in \mathbf{N}^*$:

$$\sigma_q X - z^\mu A_0 X = Y \Longleftrightarrow X = -z^d A_0^{-1} Y + z^d A_0^{-1} \sigma_q X,$$

que l'on peut encore considérer comme une équation au point fixe, dont l'unique solution formelle est :

$$X = -\sum_{k \geq 1} q^{dk(k-1)/2} z^{kd} A_0^{-k} \sigma_q^{k-1} Y.$$

En revanche, en prenant $n = 1$, $d = 1$, $Y = 1$, $A_0 = 1$, on voit bien que cette série n'a aucune raison de converger. D'ailleurs, nous savons d'avance que le conoyau de $\sigma_q - A$ est de dimension nd. Nous allons le vérifier directement.

Proposition 4.11 *On se place dans le cas convergent. Soient $d \in \mathbf{N}^*$ et $A_0 \in GL_n(\mathbf{C})$. L'image de l'application $\sigma_q - z^d A_0$ de K^n dans lui-même admet pour supplémentaire E^n, où $E := \sum_{i=0}^{d-1} \mathbf{C} z^i$.*

Preuve. - Pour $i = 0, \ldots, d-1$, notons K_i le sous-espace de K formé des fonctions de la forme $z^i f(z^d)$, avec $f \in K$. On a donc :

$$K = K_0 \oplus \cdots \oplus K_{d-1}.$$

La relation :

$$(\sigma_q - z^{-d} A_0)\big(z^i U(z^d)\big) = z^i \big(q^i U(q^d z^d) - z^{-d} A_0 U(z^d)\big)$$

montre que chaque K_i est stable ; de plus, notant $z' := z^d$, $K' := \{f(z^d) \mid f \in K\}$, $q' := q^d$ et $\sigma' : f(z') \mapsto f(q'z')$, la restriction de $\sigma_q - z^{-d} A_0$ à K_i est conjuguée par l'isomorphisme $f \mapsto z^i f$ de K' sur K_i à l'application $q^i \sigma' - (z')^{-1} A_0$ de $\mathbf{C}(\{z'\}^n$ dans lui-même. On est ainsi ramené au cas $d = 1$.
Il s'agit alors de démontrer que l'image de l'application $\sigma_q - z^{-1} A_0$ de K^n dans lui-même admet pour supplémentaire $\mathbf{C}^n$. Il est équivalent, et plus commode, de considérer 'application $z\sigma_q - A_0$. On écrit cela sous la forme d'une décomposition :

$$Y = z\sigma_q X - A_0 X + Z;$$

plus précisément, il s'agit, $Y \in K^n$ étant donné, de déterminer $X \in K^n$ et $Z \in \mathbf{C}^n$ (qui doivent en principe être uniques). On écrit $X = \sum X_k z^k$, $Y = \sum Y_k z^k$ (attention, cette notation n'a pas de rapport avec celle des K_i plus haut). La relation de récurrence qui vient est :

$$\begin{aligned} Y_0 &= q^{-1} X_{-1} - A_0 X_0 + Z, \\ Y_k &= q^{k-1} X_{k-1} - A_0 X_k \ (k \neq 0). \end{aligned}$$

En appliquant la transformation de Borel-Ramis (4.7.1), page 73, on est ramené à l'équation :

$$\mathcal{B}_{q,1} Y = (z - A_0) \mathcal{B}_{q,1} X + Z.$$

Un calcul similaire à celui déjà fait montre alors que l'unique solution s'obtient en prenant :

$$Z = \sum_{k \in \mathbf{Z}} q^{-k(k-1)/2} A_0^k Y_k.$$

□

Références

[1] **Adams C.R, 1929.** On the Linear Ordinary q-Difference Equations, *Ann. Math.*, Série 2, Vol. 30, no 2, pp 195-205.

[2] **Adams C.R, 1931.** Linear q-Difference Equations, *Bull. A.M.S.*, pp 361-399.

[3] **Bézivin J.-P., 1992.** Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, *Aequationes Mathematicae*, 43, pp. 159-176.

[4] **Birkhoff G.D. and Guenther P.E., 1941.** Note on a Canonical Form for the Linear q-Difference System, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Vol. 27, No. 4, pp. 218-222.

[5] **Di Vizio L., 2002.** Arithmetic theory of q-difference equations : the q-analogue of Grothendieck-Katz's conjecture on p-curvatures. *Invent. Math.* 150, no. 3, 517–578.

[6] **Di Vizio L., 2009.** Local analytic classification of q-difference equations with $|q| = 1$, Journal of Noncommutative Geometry, 3(1), 125–149.

[7] **Di Vizio L., Ramis J.-P., Sauloy J. et Zhang C., 2003.** Équations aux q-différences, *Gazette des Mathématiciens*, no 96, Société Mathématique de France.

[8] **Marotte F. et Zhang C., 2000.** Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique, *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 50, fasc. 6, pp. 1859-1890.

[9] **van der Put M. and Singer M.F., 1997.** *Galois theory of difference equations*, *Lecture Notes in Mathematics*, 1666, Springer Verlag.

[10] **Ramis J.P., 1990.** Fonctions θ et équations aux q-différences, non publié, Strasbourg.

[11] **Ramis J.-P., 1992.** About the growth of entire functions solutions to linear algebraic q-difference equations, *Annales de Fac. des Sciences de Toulouse*, Série 6, Vol. I, no 1, pp. 53-94.

[12] **Ramis J.-P., Sauloy J., 2007.** The q-analogue of the wild fundamental group (I). *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies*, 167–193, RIMS KÃťkyÃżroku Bessatsu, B2, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto.

[13] **Ramis J.-P., Sauloy J., 2009.** The q-analogue of the wild fundamental group (II). *À paraître dans Astérisque.*

[14] **Ramis J.-P., Sauloy J.** The q-analogue of the wild fundamental group (III). *Article en préparation.*

[15] **Ramis J.-P., Sauloy J. and Zhang C.** Local analytic classification of irregular q-difference equations, *Article en préparation.*

[16] **Sauloy J., 2000.** Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie, *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 50, fasc. 4, pp. 1021-1071.

[17] **Sauloy J., 2004.** La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) 54, no. 1, 181–210.

[18] **Sauloy J., 2003.** Galois theory of Fuchsian q-difference equations. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 36, no. 6, 925–968