Rev. Semin. Iberoam. Mat. **4** fasc. I (2010) 81–94

Classification de modules aux différences filtrés isogradués

J. Sauloy *

Résumé

La classification analytique locale des équations aux q-différences irrégulières ([3]) se ramène à la classification de modules aux q-différences filtrés à gradué fixé. Nous dégageons ici des hypothèses générales qui assurent l'existence d'un schéma de modules pour ce problème, qui soit de plus un espace affine.

Formulation générale du problème

Les *modules aux q-différences* associés aux équations aux q-différences linéaires analytiques en 0 sont naturellement munis d'une filtration par les pentes respectée par les morphismes analytiques et telle que deux modules sont formellement isomorphes si, et seulement s'ils ont des gradués isomorphes. La *classification analytique isoformelle* ([3]) est ainsi ramenée à la *classification isograduée de modules filtrés*. Cette dernière admet une formulation purement algébrique et pose un problème assez naturel, que nous allons décrire sous une forme un peu plus générale.

Soient C un anneau commutatif et $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne C-linéaire. On fixe un objet finiment gradué :

$$P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k,$$

et l'on se propose de classifier les couples $(\underline{M}, \underline{u})$ formés d'un objet finiment filtré :

$$\underline{M} = (0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M),$$

et d'un isomorphisme de gr$M$ sur P :

$$\underline{u} = (u_i : M_i/M_{i-1} \simeq P_i)_{1 \leq i \leq k}.$$

*Laboratoire Émile Picard, Institut de Mathématiques, CNRS UMR 5219, U.F.R. M.I.G., Université Paul Sabatier (Toulouse 3), 31062 Toulouse CEDEX 9

Il revient d'ailleurs au même de se donner k suites exactes :

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \xrightarrow{v_i} P_i \to 0.$$

(On laisse au lecteur le soin de se convaincre que cela revient en effet au même.) Les couples $(\underline{M},\underline{u})$ et $(\underline{M'},\underline{u'})$ sont déclarés équivalents si (avec les notations évidentes pour $\underline{M'}$) il existe un morphisme de M dans M' qui respecte les filtrations et compatible avec les isomorphismes des gradués, *i.e.* tel que $u = u' \circ \mathrm{gr} f$, *i.e.* tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}M \arrow[rr, "\mathrm{gr}f"] \arrow[dr, "u"'] & & \mathrm{gr}M' \arrow[dl, "u'"] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

Dans la description par suites exactes : s'il existe des morphismes $f_i : M_i \to M'_i$ rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & M_i \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "f_i"] & P_i \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{P_i}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'_{i-1} \arrow[r] & M'_i \arrow[r, "v'_i"] & P_i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Remarque. S'il existe un tel morphisme, il est automatiquement strict et un isomorphisme.

On notera $\mathcal{F}(P_1,\dots,P_k)$ l'ensemble des classes de couples $(\underline{M},\underline{u})$ pour la relation d'équivalence ci-dessus. Nous admettons que c'est bien un ensemble : on se restreint si l'on y tient à de petites catégories, ou bien on suppose que les Ext en sont, ce qui (d'après les arguments de dévissage qui vont suivre page 82) suffit. Dans le cas que nous traiterons (sous-catégories de la catégorie des modules à gauche sur un anneau), c'est facile à vérifier.

Pour $k = 1$, l'ensemble $\mathcal{F}(P_1)$ est un singleton. Pour $k = 2$, l'ensemble $\mathcal{F}(P_1,P_2)$ s'identifie naturellement à l'ensemble $\mathrm{Ext}(P_2,P_1)$ des classes d'extensions de P_2 par P_1, lequel porte une structure de C-module. L'identification s'obtient comme suit. Se donner un module filtré $\underline{M} = (0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 = M)$ muni d'un isomorphisme de $\mathrm{gr}M$ sur $P_1 \oplus P_2$ revient à se donner un isomorphisme de M_1 sur P_1 et un isomorphisme de M/M_1 sur P_2, soit encore un monomorphisme i de P_1 dans M et un épimorphisme p de M sur P_2 de noyau $i(P_1)$, soit encore une suite exacte

$$0 \to P_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} P_2 \to 0,$$

c'est-à-dire une extension de P_2 par P_1. Et l'on vérifie sans peine que notre relation d'équivalence correspond ainsi à l'isomorphisme usuel d'extensions.

Notre but est de trouver des conditions qui garantissent que $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k)$ porte une structure d'espace affine sur C, et d'en calculer la dimension. Le cas $k=2$ suggère de supposer que les C-modules $\mathrm{Ext}(P_j,P_i)$ sont libres de rang fini (on verra qu'en fait seuls comptent les couples tels que $i<j$). On procède ensuite à un dévissage. En vue d'une récurrence sur k, on invoque une surjection naturelle :

$$\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k) \longrightarrow \mathcal{F}(P_1,\ldots,P_{k-1}),$$

qui, à la classe de $(\underline{M},\underline{u})$ défini comme plus haut, associe la classe de $(\underline{M'},\underline{u'})$ défini par

$$\underline{M'} = (0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{k-1} = M') \text{ et } \underline{u'} = (u_i)_{1\leq i\leq k-1}.$$

L'image réciproque de la classe de $(\underline{M'},\underline{u'})$ décrit comme ci-dessus s'identifie à $\mathrm{Ext}(P_k, M')$. Noter que $\mathrm{Ext}(P_k,M')$ ne dépend bien en effet (à isomorphisme canonique près) que de la classe de $(\underline{M'},\underline{u'})$. Sous les conditions où nous nous placerons, on verra que $\mathrm{Ext}(P_k,M')$ se dévisse à son tour en les $\mathrm{Ext}(P_k,P_i)$ pour $i<k$, et l'on s'attend à obtenir un espace de dimension $\sum\limits_{1\leq i<j\leq k} \dim \mathrm{Ext}(P_j,P_i)$.

Remarque. Une fois décrit l'espace $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k)$, on peut poser le problème (apparemment plus naturel) de la classification des M tels que $\mathrm{gr} M \simeq P$ (où l'on ne prescrit pas la “polarisation” u). On vérifie que $\prod \mathrm{Aut}\,(P_i)$ agit sur $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k)$ (c'est l'action sur “l'ensemble” des $(\underline{M},\underline{u})$ par compositions à gauche $\phi_i \circ u_i$) et qu'il s'agit de quotienter par cette action. On ne s'occupera pas ici de ce problème.

L'usage de l'algèbre homologique dans les problèmes de classification des équations différentielles n'est pas nouveau, mais l'auteur de ce texte croit avoir remarqué que l'étape de modélisation algébrique préliminaire est souvent traitée de manière désinvolte. Ainsi, l'identification des modules d'extensions à des conoyaux comporte presque toujours la description explicite d'une application, parfois la preuve de sa bijectivité, rarement la preuve de son additivité et (semble-t-il) jamais la preuve de sa linéarité. Pour cette raison, un très grand soin a été ici apporté au détail des constructions algébriques et aux démonstrations d'isomorphies "évidentes".

Remerciements. Ce texte a été achevé lors d'un séjour en tant que professeur invité au laboratoire "Álgebra, Geometría y Topología" de l'Université de Valladolid, avec le soutien de l'Instituto de Estudios de Iberoamérica y Portugal. Je remercie chaleureusement José-Manuel Aroca, Felipe Cano y los otros amigos de ahí pour leur accueil amical.

1 Modules aux différences

Soient C un anneau commutatif [1], K une C-algèbre commutative et σ un automorphisme de la C-algèbre K. On note :

$$K^{\sigma} := \{x \in K \,|\, \sigma x = x\}$$

[1] Le choix de la lettre C peut évoquer le corps $\mathbf{C}$ des complexes ou bien un corps de “constantes”.

la sous-C-algèbre des *constantes*, et l'on introduit l'anneau de Öre des *opérateurs aux différences* :

$$\mathcal{D}_{K,\sigma} := K < \sigma, \sigma^{-1} >= \Big\{ \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i \sigma^i \,|\, (a_i) \in K^{(\mathbf{Z})} \Big\}.$$

Ses éléments sont des polynômes de Laurent non commutatifs, et la multiplication est caractérisée par la relation de commutation tordue :

$$\forall k \in \mathbf{Z} \ , \ \lambda \in K \ , \ \sigma^k . \lambda = \sigma^k(\lambda) \sigma^k.$$

Le centre de la C-algèbre $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ est K^σ.

Remarque. En principe, la théorie des modules aux différences repose sur celle des corps différentiels : K serait un corps et $C := K^\sigma$ son corps des constantes. Nos hypothèses plus faibles sont choisies en vue de la situation "relative" (extension des scalaires).

Définition 1.1 *Un* module aux différences *sur la* C-algèbre aux différences (K, σ) *(ou, pour faire court, sur K) est un $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module à gauche qui induit, par restriction des scalaires, un K-module projectif de rang fini. La sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}_{K,\sigma} - Mod$ (catégorie des $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-modules à gauche) formée des modules aux différences sera notée $DiffMod(K, \sigma)$. (Les deux catégories sont abéliennes et C-linéaires.)*

Tout $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-module à gauche peut être réalisé par un couple (E, Φ), où E est un K-module (obtenu par restriction des scalaires) et Φ, qui incarne la multiplication à gauche par σ, est un *automorphisme semi-linéaire* ou encore σ-*linéaire*, *i.e.* un automorphisme du groupe E tel que :

$$\forall \lambda \in K \ , \ \forall x \in E \ , \ \Phi(\lambda x) = \sigma(\lambda) \Phi(x).$$

Dans cette description, un morphisme de $\mathcal{D}_{K,\sigma}$-modules à gauche de (E, Φ) dans (F, Ψ) est une application $u \in \mathcal{L}_K(E, F)$ (autrement dit, une application K-linéaire $u : E \to F$) telle que $\Psi \circ u = u \circ \Phi$. Lorsque E est projectif de rang fini, nous noterons $M := (E, \Phi)$ le module aux différences correspondant.

Exemple. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in GL_n(K)$. L'application

$$X \mapsto \Phi_A(X) := A^{-1} \sigma X$$

de $E := K^n$ dans lui-même est un automorphisme semi-linéaire et $M := (K^n, \Phi_A)$ est un module aux différences sur K. Les "vecteurs horizontaux" de M sont les $X \in K^n$ tels que $\Phi_A(X) = X$, autrement dit, les solutions dans K^n de "l'équation aux σ-différences" $\sigma X = AX$: c'est pour cela que nous avons utilisé A^{-1}.

1.1 Description matricielle des modules aux différences

On suppose ici que le K-module E est *libre* de rang fini n. Cette hypothèse sera reprise aux paragraphes 1.2 et2.2, où la description matricielle sera poursuivie.

Le choix d'une base $\mathcal{B}$ permet d'identifier E à K^n. Il est alors clair que $\Phi(\mathcal{B})$ est encore une base de E, d'où l'existence de $A \in GL_n(K)$ telle que $\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}A^{-1}$. Si le vecteur colonne des coordonnées de $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ est $X \in K^n$, ce que l'on peut écrire $x = \mathcal{B}X$, le calcul :

$$\Phi(x) = \Phi(\mathcal{B}X) = \Phi(\mathcal{B})\sigma(X) = \mathcal{B}A^{-1}\sigma(X)$$

montre que le vecteur colonne des coordonnées de $\Phi(x)$ dans $\mathcal{B}$ est $A^{-1}\sigma(X)$; autrement dit, avec les notations de l'exemple précédent, on obtient une identification :

$$(E,\Phi) \simeq (K^n,\Phi_A).$$

Notons enfin que les morphismes de (K^n,Φ_A) dans (K^p,Φ_B) s'identifient aux matrices $F \in M_{p,n}(K)$ telles que :

$$(\sigma F)A = BF,$$

et la composition se ramène au produit matriciel. En particulier :

$$(K^n,\Phi_A) \simeq (K^p,\Phi_B) \Longleftrightarrow n = p \text{ et } \exists F \in GL_n(K) \ : \ B = F[A] := (\sigma F)AF^{-1};$$

("Transformation de jauge".)

1.2 Description matricielle des modules aux différences filtrés

Soient $P_i = (G_i,\Psi_i)$ $(1 \leq i \leq k)$ des module aux différences tels que les K-modules G_i soient libres de rang fini r_i . On munit chaque G_i d'une base $\mathcal{D}_i$, et l'on note $B_i \in GL_{r_i}(K)$ la matrice inversible telle que $\Psi_i(\mathcal{D}_i) = \mathcal{D}_iB_i$.

Soit $\underline{M}$ un module aux différences filtré de gradué $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$; plus précisément, $\underline{M} = (0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M)$ est muni d'un isomorphisme $\underline{u} = (u_i : M_i/M_{i-1} \simeq P_i)_{1\leq i\leq k}$ de gr$M$ sur P. Notant $M_i = (E_i,\Phi_i)$, on construit par récurrence sur $i = 1,\ldots,k$ une base $\mathcal{B}_i$ de E_i telle que $\mathcal{B}_{i-1} \subset \mathcal{B}_i$ et que $\mathcal{B}_i' := \mathcal{B}_i \setminus \mathcal{B}_{i-1}$ relève $\mathcal{D}_i$ via u_i (on voit au passage que les K-modules E_i soient libres de rang fini $r_1 + \cdots + r_i$).

Notant Φ_i (resp. $\overline{\Phi_i}$) l'automorphisme semi-linéaire induit par Φ (resp. par Φ_i) sur E_i (resp. sur E_i/E_{i-1}), et $\mathcal{C}_i$ la base de E_i/E_{i-1} induite par $\mathcal{B}_i'$, on déduit de l'égalité $u_i \circ \overline{\Phi_i} = \Psi_i \circ u_i$ (dûe au fait que u_i est un morphisme) la relation : $\overline{\Phi_i}(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_iB_i$, puis, de cette dernière, la relation :

$$\Phi_i(\mathcal{B}_i') \equiv \mathcal{B}_i'B_i \pmod{E_{i-1}}.$$

On en tire enfin la forme triangulaire supérieure par blocs de la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\Phi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}\begin{pmatrix} B_1 & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & B_k \end{pmatrix}.$$

Conformément aux conventions du paragraphe 1.1, nous identifierons P_i $(1 \leq i \leq k)$ à (K^{r_i}, Φ_{A_i}), où $A_i := B_i^{-1} \in GL_{r_i}(K)$. De même, P s'identifie à (K^n, Φ_{A_0}) et M à (K^n, Φ_A), où $n := r_1 + \cdots + r_k$ et :

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_k \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Il faut noter qu'une telle écriture sous-entend implicitement la donnée d'une filtration sur M et d'un isomorphisme de gr$M$ sur P. Si de plus $M' = (K^n, \Phi_{A'})$, où A' est de la même forme que A (*i.e.* M' est filtré et muni d'un isomorphisme de grM' sur P), alors un morphisme de M dans M' qui respecte les filtrations (*i.e.* qui envoie chaque M_i dans M'_i) est décrit par une matrice de la forme F suivante, et l'endomorphisme induit de $P \simeq \mathrm{gr}M \simeq \mathrm{gr}M'$ est décrit par la matrice F_0 correspondante :

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & F_k \end{pmatrix} \text{ et } F_0 = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & F_k \end{pmatrix}.$$

En particulier, un morphisme qui induit l'identité sur P (et donc assure que les modules filtrés M et M' appartiennent à la même classe de $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k)$) est représenté par une matrice de $\mathfrak{G}(K)$, où $\mathfrak{G}$ désigne le sous-groupe algébrique de $GL_n(K)$ défini par le format suivant :

$$\begin{pmatrix} I_{r_1} & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & I_{r_k} \end{pmatrix}.$$

Notons A_U la matrice triangulaire par blocs dont la composante diagonale par blocs est A_0 et donc les blocs supérieurs rectangulaires correspondants sont les $U_{i,j} \in M_{r_i,r_j}(K)$ $(1 \leq i < j \leq k)$; ici, U est une notation abrégée pour la famille des $U_{i,j}$. Pour tout $F \in \mathfrak{G}(K)$, la matrice $F[A_U]$ est de la forme A_V, pour une famille de $V_{i,j} \in M_{r_i,r_j}(K)$. On obtient ainsi une opération à gauche du groupe $\mathfrak{G}(K)$ sur l'ensemble $\prod_{1 \leq i < j \leq k} M_{r_i,r_j}(K)$.

Les arguments précédents se résument ainsi :

Proposition 1.2 *L'application qui, à U associe la classe de (K^n, Φ_{A_U}) induit une bijection entre, d'une part, le quotient de l'ensemble $\prod_{1 \leq i < j \leq k} M_{r_i,r_j}(K)$ par l'action du groupe $\mathfrak{G}(K)$ et, d'autre part, l'ensemble $\mathcal{F}(P_1, \ldots, P_k)$.*

2 Extensions de modules aux différences

Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte dans $\mathcal{D}_{K,\sigma} - Mod$. Si M' et M'' sont des modules aux différences, il en est de même de M (qui est K-projectif de rang fini parce que la suite est K-scindée). Le calcul des extensions dans $DiffMod(K,\sigma)$ est donc le même que dans $\mathcal{D}_{K,\sigma} - Mod$. On notera simplement $\mathrm{Ext}(M'', M')$ le groupe

$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_{K,\sigma}}(M'',M')$ des classes d'extension de M'' par M'. D'après [2], §7, ce groupe est muni d'une structure de C-module qui est bien décrite dans *loc. cit.* [2]. On va expliciter cette structure dans le cas où M' et M'' sont des modules aux différences.

Soient donc $M = (E,\Phi)$ et $N = (F,\Psi)$. Toute extension $0 \to N \to R \to M \to 0$ de M par N donne lieu, par oubli, à une suite exacte de K-modules $0 \to F \to G \to E \to 0$ telle que, si $R = (G,\Gamma)$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{j} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\Psi} & & \downarrow{\scriptstyle\Gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{j} & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(On a encore noté i et j les applications K-linéaires sous-jacentes aux morphismes éponymes.) Puisque E est projectif, la suite est scindée et l'on peut d'emblée identifier G au K-module $F \times E$, ce que nous ferons ; on note alors $i(y) = (y,0)$ et $j(y,x) = x$. Les conditions de compatibilité $\Gamma \circ i = i \circ \Psi$ et $\Phi \circ j = j \circ \Gamma$ entrainent alors :

$$\Gamma(y,x) = \Gamma_u(y,x) := \big(\Psi(y) + u(x), \Phi(x)\big), \text{ avec } u \in \mathcal{L}_\sigma(E,F),$$

où nous notons $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$ l'ensemble des applications σ-linéaires de E dans F. (Autrement dit, u est un morphisme de groupes tel que $u(\lambda x) = \sigma(\lambda)u(x)$.) Notant de plus $R_u := (F \times E, \Gamma_u)$, qui est un module aux différences naturellement muni d'une structure d'extension de M par N, on voit que l'on a ainsi défini une application surjective :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma(E,F) &\to \mathrm{Ext}(M,N), \\ u &\mapsto \theta_u := \text{ classe de } R_u. \end{aligned}$$

On peut préciser à quelle condition $u,v \in \mathcal{L}_\sigma(E,F)$ ont même image $\theta_u = \theta_v$, *i.e.* à quelle condition les extensions R_u et R_v sont équivalentes. Cela se produit s'il existe un morphisme $\phi : R_u \to R_v$ qui induit l'identité sur M et N, autrement dit, une application linéaire $\phi : F \times E \to F \times E$ telle que $\Gamma_v \circ \phi = \phi \circ \Gamma_u$ (puisque c'est un morphisme de modules aux différences) et de la forme $(x,y) \mapsto \big(y + f(x), x\big)$ (car elle induit les identités de E et de F). Sous cette dernière forme, la première condition s'écrit :

$$\forall (y,x) \in F \times E\ ,\ \big(\Psi(y + f(x)) + v(x), \Phi(x)\big) = \big(\Psi(y) + u(x) + f(\Phi(x)), \Phi(x)\big),$$

c'est-à-dire :

$$u - v = \Psi \circ f - f \circ \Phi.$$

Remarquons d'ailleurs que, pour tout $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$, l'application $t_{\Phi,\Psi}(f) := \Psi \circ f - f \circ \Phi$ est σ-linéaire de E dans F.

Theorème 2.1 *L'application $u \mapsto \theta_u$ de $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$ sur Ext(M,N) est fonctorielle en M et en N, C-linéaire et son noyau est l'image de l'application C-linéaire :*

$$\begin{aligned} t_{\Phi,\Psi} : \mathcal{L}_K(E,F) &\to \mathcal{L}_\sigma(E,F), \\ f &\mapsto \Psi \circ f - f \circ \Phi. \end{aligned}$$

[2]Et, à ma connaissance, nulle part ailleurs.

Preuve. -
Fonctorialité.
Nous ne la prouverons (et ne l'utiliserons) que du côté covariant, *i.e.* en N. Nous invoquons [2], §7.1 p. 114 exemple 3 et §7.4, p. 119, prop. 4. Soient θ la classe dans $\mathrm{Ext}(M,N)$ de l'extension $0 \xrightarrow{i} N \to R \xrightarrow{j} M \to 0$ et $g : N \to N'$ un morphisme dans $DiffMod(K,\sigma)$. Soit

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & R \arrow[r, "j"] \arrow[d, "h"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "i'"] & R' \arrow[r, "j'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de suites exactes. Si θ' est la classe dans $\mathrm{Ext}(M,N)$ de l'extension $0 \xrightarrow{i'} N' \to R' \xrightarrow{j'} M \to 0$, alors :

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{Id}_M, g)(\theta) = g \circ \theta = \theta' \circ \mathrm{Id}_M = \theta'.$$

On peut prendre par exemple :

$$R' := R \oplus_N N' = \frac{R \times N'}{\{\big(i(n), -g(n)\big) \,|\, n \in N\}},$$

avec pour i', j' les flèches évidentes. Prenant pour R l'extension R_u et reprenant les notations antérieures pour N, M, R, et notant de plus $N' = (F', \Psi')$, avec la condition de compatibilité $\Psi' \circ g = g \circ \Psi$, on voit que le K-module sous-jacent à $R \oplus_N N'$ est :

$$G' := \frac{F \times E \times F'}{\{\big(y, 0, -g(y)\big) \,|\, y \in F\}},$$

muni de l'automorphisme semi-linéaire induit par l'application $\Gamma_u \times \Psi'$ de $F \times E \times F'$ dans lui-même (celle-ci laisse bien stable le dénominateur).
L'application $(y,x,y') \mapsto \big(y' + g(y), x\big)$ de $F \times E \times F'$ dans $F' \times E$ induit un isomorphisme de G' sur $F' \times E$ et l'automorphisme semi-linéaire induit sur G' est $(y',x) \mapsto \big(\Psi'(y') + g\big(u(x)\big), \Phi(x)\big)$, c'est-à-dire Γ_{gu}, d'où l'on tire que $R' = R_{gu}$. Les flèches i' et j' sont déterminées comme suit : $i'(y')$ est la classe de $(0,y')$ dans G', soit, avec l'identification ci-dessus, $i'(y') = (y',0)$; et $j'(y',x)$ est l'image d'un antécédent quelconque, par exemple la classe de $(0,x,y')$, image qui vaut $j(0,x) = x$. On a donc établi que la classe de l'extension R_u par $\mathrm{Ext}(\mathrm{Id}_M, g)$ est R_{gu}, ce qui est la fonctorialité annoncée. Elle se traduit par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_\sigma(E,F) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{L}_\sigma(\mathrm{Id}_M, g)"] & \mathrm{Ext}(M,N) \arrow[d, "\mathrm{Ext}(\mathrm{Id}_M, g)"] \\
\mathcal{L}_\sigma(E,F') \arrow[r] & \mathrm{Ext}(M,N')
\end{tikzcd}$$

Linéarité.
L'application $t_{\Phi,\Psi}$ va bien de $\mathcal{L}_K(E,F)$ dans $\mathcal{L}_\sigma(E,F)$ d'après la remarque qui précède

immédiatement du théorème.
Addition. La référence est ici [2],§7.6, rem. 2 p. 124. À partir des extensions $0 \to N \xrightarrow{i} R \xrightarrow{p} M \to 0$ and $0 \to N \xrightarrow{i'} R' \xrightarrow{p'} M \to 0$ de classes $\theta, \theta' \in \mathrm{Ext}^1(M,N)$, on calcule $\theta + \theta'$ comme classe de l'extension $0 \to N \xrightarrow{i''} R'' \xrightarrow{p''} M \to 0$, où :

$$R'' := \frac{\{(z,z') \in R \times R' \,|\, p(z) = p'(z')\}}{\{(-i(y), i'(y)) \,|\, y \in N\}},$$

et $i''(y)$ est la classe de $(0, i'(y))$, *i.e.* la même que la classe de $(i(y), 0)$; et p'' envoie la classe de (z,z') sur $p(z) = p'(z')$. Si l'on prend $R = R_u$ et $R' = R_{u'}$, le numérateur de R'' s'identifie à $F \times F \times E$ muni de l'automorphisme semi-linéaire $(y,y',x) \mapsto (\Psi(y) + u(x), \Psi(y') + u'(x), \Phi(x))$. Le dénominateur s'identifie au sous-espace $\{(-y,y,0) \,|\, y \in F\}$ muni de l'application induite. Le quotient s'identifie à $0 \times F \times E$, via l'application $(y,y',x) \mapsto (0,y'',x)$, où $y'' := y' + y$ muni de l'automorphisme semi-linéaire Φ'' qui envoie $(0,y'',x)$ sur

$$(0, \Psi(y') + u'(x) + \Psi(y) + u(x), \Phi(x)) = (0, \Psi(y'') + (u+u')(x), \Phi(x)).$$

On reconnait bien $R_{u+u'}$.
Multiplication externe. La référence est ici [2],§7.6, prop. 4 p. 119. Soit $\lambda \in C$. On applique la proposition indiquée au diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R_u & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow \times\lambda & & \big\downarrow (\times\lambda, \mathrm{Id}_M) & & \big\downarrow \mathrm{Id}_M & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & R_{\lambda u} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Si θ, θ' sont les classe dans $\mathrm{Ext}(M,N)$ des deux extensions, on déduit de *loc. cit.* que :

$$\theta' \circ \mathrm{Id}_M = (\times\lambda) \circ \theta \Longrightarrow \theta' = \lambda\theta.$$

La classe de l'extension $R_{\lambda u}$ est donc bien égale au produit par λ de la classe de l'extension R_u.

<u>Exactitude.</u>
Elle découle immédiatement du calcul qui précède l'énoncé du théorème. □

2.1 Le complexe des solutions

Définition 2.2 *On appelle* complexe des solutions de M dans N *le complexe de C-modules :*

$$t_{\Phi,\Psi} : \mathcal{L}_K(E,F) \to \mathcal{L}_\sigma(E,F), \qquad f \mapsto \Psi \circ f - f \circ \Phi.$$

concentré aux degrés 0 *et* 1.

Il est bien clair que ce sont bien des C-modules et que l'application est bien définie (elle va dans son but !) et C-linéaire.

Corollaire 2.3 *Le complexe des solutions a pour homologie $H^0 = Hom(M,N)$ et $H^1 = Ext(M,N)$ et ceci, fonctoriellement.*

Preuve. - Pour H^1, c'est le théorème. Pour H^0, on voit que le noyau de $t_{\Phi,\Psi}$ est le C-module $\{f \in \mathcal{L}_K(E,F) \,|\, \Psi \circ f = f \circ \Phi\}$, c'est-à-dire $\mathrm{Hom}(M,N)$; et la fonctorialité est ici évidente. $\square$

Corollaire 2.4 *De la suite exacte $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$, on déduit la "longue suite exacte de cohomologie" :*

$$0 \to Hom(M,N') \to Hom(M,N) \to Hom(M,N'') \to Ext(M,N') \to \\ Ext(M,N) \to Ext(M,N'') \to 0.$$

Preuve. - On conserve les notations précédentes (que l'on adapte de plus à N''). La suite exacte de K-modules (projectifs) $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ étant scindée, les deux lignes du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_K(E,F') & \longrightarrow & \mathcal{L}_K(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}_K(E,F'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle t_{\Phi,\Psi'}} & & \downarrow{\scriptstyle t_{\Phi,\Psi}} & & \downarrow{\scriptstyle t_{\Phi,\Psi''}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_\sigma(E,F') & \longrightarrow & \mathcal{L}_\sigma(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}_\sigma(E,F'') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

sont exactes, et il suffit alors d'invoquer le lemme du serpent. $\square$

2.2 Description matricielle des extensions de modules aux différences

On suppose ici E et F libres sur K, et l'on opère les identifications correspondantes $M = (K^m, \Phi_A)$, $A \in GL_m(K)$ et $N = (K^n, \Phi_B)$, $B \in GL_n(K)$. Une extension de N par M est alors de la forme $R = (K^{m+n}, \Phi_C)$, où $C = \begin{pmatrix} A & U \\ 0_{n,m} & B \end{pmatrix}$ pour une certaine matrice rectangulaire $U \in M_{m,n}(K)$; nous noterons $C = C_U$. L'injection $M \to R$ et la projection $R \to N$ ont respectivement pour matrice $\begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n,m} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_{n,m} & I_n \end{pmatrix}$. L'extension ainsi définie sera notée R_U.

Un morphisme d'extensions $R_U \to R_V$ est une matrice de la forme $F = \begin{pmatrix} I_m & X \\ 0_{n,m} & I_n \end{pmatrix}$ pour une certaine matrice rectangulaire $X \in M_{m,n}(K)$. La condition de compatibilité avec les automorphismes semi-linéaires s'écrit :

$$(\sigma F) C_U = C_V F \iff U + (\sigma X) B = AX + V \iff V - U = (\sigma X) B - AX.$$

Corollaire 2.5 *Le C-module $Ext^1(N,M)$ s'identifie ainsi avec le conoyau de l'endomorphisme $X \mapsto (\sigma X)B - AX$ de $M_{m,n}(K)$.*

Preuve. - La construction ci-dessus fournit une bijection, mais il résulte du théorème 2.1 qu'il s'agit bien d'un isomorphisme. $\Box$

3 Extension des scalaires

On veut considérer $\mathcal{F}(P_1,\ldots,P_k)$ comme un schéma sur C, donc comme un foncteur (représentable) $C' \rightsquigarrow \mathcal{F}(C' \otimes_C P_1,\ldots,C' \otimes_C P_k)$ des C-algèbres commutatives vers les ensembles. Pour cela, on va étendre ce qui précède en une situation "relative".

Soit C' une C-algèbre commutative. On note :

$$K' := C' \otimes_C K \text{ et } \sigma' := 1 \otimes_C \sigma.$$

Donc K' est une C'-algèbre commutative et σ' est un automorphisme de cette C'-algèbre. On a alors :

$$\mathcal{D}_{K',\sigma'} := K' < \sigma', \sigma'^{-1} >= K' \otimes_K \mathcal{D}_{K,\sigma} = C' \otimes_C \mathcal{D}_{K,\sigma}.$$

Ces égalités signifient : isomorphismes naturels (fonctoriels).

Pour tout module aux q-différences $M = (E,\Phi)$ sur (K,σ), on obtient un module aux q-différences $M' = (E',\Phi')$ sur (K',σ') en posant :

$$E' = K' \otimes_K E = C' \otimes_C E \text{ et } \Phi' = \sigma' \otimes_K \Phi = 1 \otimes_C \Phi.$$

(C'est bien un $\mathcal{D}_{K',\sigma'}$-module à gauche qui est projectif de rang fini sur K'.) Nous le noterons $M' = C' \otimes_k M$ pour faire ressortir sa dépendance en C'. La proposition suivante est l'outil pour traiter le cas où $k = 2$.

Proposition 3.1 *Soient M,N deux modules aux q-différences sur (K,σ). On a un isomorphisme fonctoriel de C'-modules :*

$$Ext_{\mathcal{D}_{K',\sigma'}}(C' \otimes_C M, C' \otimes_C N) \simeq C' \otimes_C Ext_{\mathcal{D}_{K,\sigma}}(M,N),$$

et un épimorphisme fonctoriel de C'-modules :

$$C' \otimes_C Hom_{\mathcal{D}_{K,\sigma}}(M,N) \to Hom_{\mathcal{D}_{K',\sigma'}}(C' \otimes_C M, C' \otimes_C N).$$

Preuve. - On notera $M' = C' \otimes_C M$, $E' = K' \otimes_K E$ etc. Les K-modules E,F étant projectifs de rang fini, on a des isomorphismes naturels :

$$C' \otimes_C \mathcal{L}_K(E,F) = \mathcal{L}_{K'}(E',F') \text{ et } C' \otimes_C \mathcal{L}_\sigma(E,F) = \mathcal{L}_{\sigma'}(E',F').$$

(C'est immédiat si E et F sont libres et le cas général s'en déduit.) En tensorisant la suite exacte (fonctorielle) :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{K,\sigma}}(M,N) \to \mathcal{L}_K(E,F) \to \mathcal{L}_\sigma(E,F) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_{K,\sigma}}(M,N) \to 0,$$

on obtient la suite exacte :

$$C' \otimes_C \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{K,\sigma}}(M,N) \to C' \otimes_C \mathcal{L}_K(E,F) \to C' \otimes_C \mathcal{L}_\sigma(E,F) \to C' \otimes_C \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_{K,\sigma}}(M,N) \to 0.$$

Les deux conclusions viennent alors par comparaison avec la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{K',\sigma'}}(M',N') \to \mathcal{L}_{K'}(E',F') \to \mathcal{L}_{\sigma'}(E',F') \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}_{K',\sigma'}}(M',N') \to 0.$$

□

Proposition 3.2 *Soit* $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ *une k-filtration de gradué* $P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$. *Alors, notant* $M'_i := C' \otimes_C M_i$ *et* $P'_i := C' \otimes_C P_i$, *on obtient une k-filtration* $0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_k = M'$ *de gradué* $P'_1 \oplus \cdots \oplus P'_k$.

Preuve. - Les P_i étant projectifs en tant que K-modules, les suites exactes $0 \to M_{i-1} \to M_i \to P_i \to 0$ sont K-scindées, donc donnent lieu par changement de base $K' \otimes_K$ aux suites exactes $0 \to M'_{i-1} \to M'_i \to P'_i \to 0$. □

Si $(\underline{M}, \underline{u})$ désigne le couple formé de l'objet k-filtré ci-dessus et d'un isomorphisme précisé de $\mathrm{gr}M$ sur $P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$, on notera $(C' \otimes_C \underline{M}, 1 \otimes_C \underline{u})$ le couple analogue déduit de la proposition.

Définition 3.3 *On définit comme suit un foncteur F de la catégorie des C-algèbres commutatives dans la catégorie des ensembles. Pour toute C-algèbre commutative* C', *on pose :*

$$F(C') := \mathcal{F}(C' \otimes_C P_1, \ldots, C' \otimes_C P_k).$$

Pour tout morphisme $C' \to C''$ *de C-algèbres commutatives, l'application* $F(C') \to F(C'')$ *est donnée par :*

$$\textit{classe de } (\underline{M'}, \underline{u'}) \mapsto \textit{classe de } (C'' \otimes_{K'} \underline{M'}, 1 \otimes_C \underline{u'}).$$

L'ensemble $F(C')$ est bien défini d'après les constructions du début de cette section. L'application $F(C') \to F(C'')$ est bien définie au niveau des couples en vertu de la proposition et elle passe au quotient (vérification laissée au lecteur). Enfin, on a bien un foncteur (l'image d'un morphisme composé est le composé des images) en vertu de la règle de contraction des produits tensoriels, qui donne ici :

$$C''' \otimes_{C''} (C'' \otimes_{C'} \underline{M'}) = C''' \otimes_{C'} \underline{M'}.$$

4 Notre espace de modules

Pour simplifier (et parce que c'est correct !), dans ce qui suit, au lieu de dire "le foncteur F est est représentable par un espace affine sur C (de dimension d)", on dira "le foncteur F est un espace affine sur C (de dimension d)"

Theorème 4.1 *On suppose que, pour $1 \leq i < j \leq k$, on a $Hom(P_j, P_i) = 0$ et que le C-module $Ext(P_j, P_i)$ est libre de rang fini $\delta_{i,j}$. Alors le foncteur $C' \rightsquigarrow F(C') := \mathcal{F}(C' \otimes_C P_1, \dots, C' \otimes_C P_k)$ est un espace affine sur C de dimension $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq k} \delta_{i,j}$.*

Preuve. - Lorsque $k = 1$, c'est trivial. Lorsque $k = 2$, notant V le C-module libre de rang fini $\mathrm{Ext}(P_2, P_1)$, il s'agit (en vertu de la proposition 3.1) du foncteur $C' \rightsquigarrow C' \otimes_C V$ qui est représenté par l'algèbre symétrique du dual de V, laquelle est une algèbre de polynômes sur C. Au delà, on va raisonner par récurrence sur k en invoquant le lemme 2.5.3, p. 139 de [1] :

Lemme 4.2 *Soit $u : F \to G$ une transformation naturelle entre deux foncteurs des C-algèbres commutatives vers les ensembles. On suppose que G est un espace affine sur C et que, pour toute C-algèbre commutative C' et tout $b \in G(C')$, la "fibre de u en b", qui est le foncteur des C'-algèbres commutatives vers les ensembles*

$$C'' \rightsquigarrow u_{C''}^{-1}\big(G(C' \to C'')(b)\big)$$

est un espace affine sur C'. Alors F est un espace affine sur C.

Dans *loc. cit.*, ce théorème est prouvé pour $C = \mathbf{C}$, mais l'argument est manifestement valable pour tout anneau commutatif. En voici le squelette. On choisit $B = C[T_1, \dots, T_d]$ qui représente (ou dont le spectre représente) G. On prend pour b l'identité de $G(B) = \mathrm{Hom}(B, B)$ ("point général") ; la fibre est représentée par $B[S_1, \dots, S_e]$. On prouve alors que $C[T_1, \dots, T_d, S_1, \dots, S_e]$ représente F. Cela donne en passant un calcul de la dimension de l'espace affine F comme somme des dimensions de G et de la "fibre générale". Dans notre application, toutes les fibres auront même dimension. Avant de poursuivre la preuve du théorème, démontrons une proposition auxiliaire.

Proposition 4.3 *Soit C' une C-algèbre commutative et soit M' un module aux différences sur $K' := C' \otimes_C K$ admettant une $(k-1)$-filtration : $0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_{k-1} = M'$ telle que $grM' \simeq P'_1 \oplus \cdots \oplus P'_{k-1}$ (comme d'habitude, $P'_i := C' \otimes_C P_i$). Alors le foncteur en C'-algèbres commutatives $C'' \rightsquigarrow Ext(C'' \otimes_C P_k, C'' \otimes_{C'} M')$ est un espace affine sur C' de dimension $\sum\limits_{1 \leq i \leq k} \delta_{i,k}$.*

Preuve. - D'après la proposition 3.1, il s'agit du foncteur $C'' \rightsquigarrow C'' \otimes_{C'} \mathrm{Ext}(P'_k, M')$. De chaque suite exacte $0 \to M'_{i-1} \to M'_i \to P'_i \to 0$ on déduit la longue suite exacte de cohomologie décrite au corollaire 2.4 ; mais, de la proposition 3.1, on déduit que, pour toute C-algèbre commutative C', on a $\mathrm{Hom}(C' \otimes_C P_j, C' \otimes_C P_i) = 0$ et que le C'-module $\mathrm{Ext}(C' \otimes_C P_j, C' \otimes_C P_i)$ est libre de rang fini $\delta_{i,j}$. Vues les égalités $\mathrm{Hom}(P'_j, P'_i) = 0$, la longue suite exacte prend ici la forme raccourcie :

$$0 \to \mathrm{Ext}(P'_k, M'_{i-1}) \to \mathrm{Ext}(P'_k, M'_i) \to \mathrm{Ext}(P'_k, P'_i) \to 0,$$

et, pour $i = 1, \dots, k-1$, ces suites sont scindées, le membre droit étant libre. On a donc finalement :

$$\mathrm{Ext}(P'_k, M') \simeq \bigoplus_{1 \le i \le k} \mathrm{Ext}(P'_k, P'_i),$$

qui est libre de rang $\sum_{1 \le i \le k} \delta_{i,k}$. Comme dans le cas $k = 2$ (qui est d'ailleurs un cas particulier de cette proposition), le foncteur indiqué est représentable par l'algèbre symétrique du dual de ce module. □

Terminons la preuve du théorème. Outre le foncteur $F(C')$, on considère le foncteur $C' \rightsquigarrow G(C') := \mathcal{F}(C' \otimes_C P_1, \dots, C' \otimes_C P_{k-1})$, dont on peut supposer que c'est un espace affine sur C de dimension $\sum_{1 \le i < j \le k-1} \delta_{i,j}$ (hypothèse de récurrence). La transformation naturelle de F dans G est celle que l'on a décrite à la fin de l'introduction, page 82. Un élément $b \in G(C')$ est la classe d'un couple $(\underline{M'}, \underline{u'})$, objet $(k-1)$-filtré sur C', et la fibre correspondante est le foncteur étudié dans la proposition auxiliaire ci-dessus. Le lemme de Babbitt et Varadarajan permet alors de conclure. □

Remarque. L'isomorphisme $\mathrm{Ext}(P'_k, M') \simeq \bigoplus_{1 \le i \le k} \mathrm{Ext}(P'_k, P'_i)$ n'est pas fonctoriel. Cependant, on doit pouvoir tirer un peu plus de la preuve ci-dessus :

- La transformation naturelle de F dans G identifie l'espace affine F au produit de l'espace affine G par l'espace affine $C' \rightsquigarrow \bigoplus_{1 \le i \le k} \mathrm{Ext}(P'_k, P'_i)$.
- Si l'on a des coordonnées sur chaque $\mathrm{Ext}(P_j, P_i)$, on a des coordonnées sur F.

Ces améliorations sont exploitées dans [3].

Références

[1] **Babbitt D.G. and Varadarajan V.S., 1989.** *Local Moduli for Meromorphic Differential Equations*, Astérisque 169-170.

[2] **Bourbaki N., 1980.** *Algèbre, Chapitre 10 : Algèbre homologique*, Masson.

[3] **Ramis J.-P., Sauloy J. and Zhang C.** Local analytic classification of analytic q-difference equations, en préparation.