

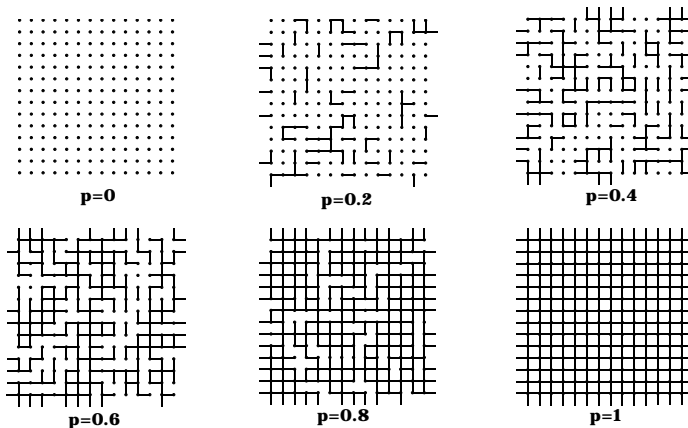
# Percolación de Bernoulli de un pseudogrupo

María Pérez Fernández de Córdoba

## 1. Introducción

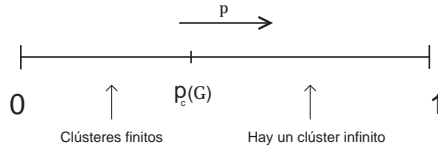
La teoría de la percolación fue introducida en los 50 por el ingeniero Simon Broadbent y el matemático John Hammersley para comprender cómo las motas de polvo obstruían las cámaras antigás. Desde entonces ha sido estudiada con el objeto de modelar numerosos procesos físicos aleatorios como la filtración de un fluido en un medio poroso, la expansión de una epidemia o la propagación de un incendio. Por ejemplo, si se introduce una gran roca porosa en un fluido, resulta interesante estudiar si el líquido fluirá hasta alcanzar el centro de la roca o si por el contrario ésta permanecerá húmeda sólo en su superficie. Sorprendentemente, la teoría de la percolación prueba que la probabilidad de que el fluido alcance el centro no aumenta gradualmente a medida que variamos el grado de porosidad, sino que pasa de ser nula a ser total a partir de un nivel crítico.

En términos matemáticos, la teoría de la percolación estudia la naturaleza y propiedades de las componentes conexas (*clústeres*) de subgrafos aleatorios de un grafo infinito  $\mathcal{G}$ . En particular, el proceso de *percolación de Bernoulli* de parámetro  $p \in [0, 1]$  sobre  $\mathcal{G}$  asigna a cada arista una probabilidad de permanencia  $p$  y una probabilidad de desaparición  $1 - p$  ([8],[12],[13]).

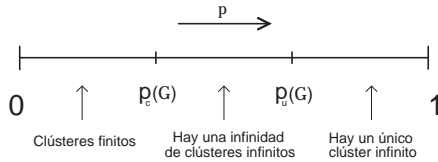


Obviamente, la probabilidad de que exista un clúster infinito en el subgrafo aleatorio obtenido es monótona creciente respecto de  $p$ . Además, sólo puede ser

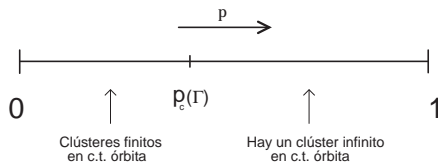
nula o total por la ley 0-1 de Kolmogorov para cada  $p$ . Luego existe un valor crítico  $p_c \in [0, 1]$  que divide el proceso en dos fases: la *fase subcrítica*  $p < p_c$  donde los clústeres son finitos (con probabilidad 1) y la *fase supercrítica*  $p > p_c$  donde existe al menos un clúster infinito (con probabilidad 1).



Cuando  $\mathcal{G}$  es un grafo de Cayley de un grupo finitamente generado  $G$ , se puede decir más acerca de los clústeres. C.M. Newman y L.S. Schulman prueban en [15] que el número de clústeres infinitos es constante igual a  $0, 1$  o  $\infty$  para cada  $p \in [0, 1]$ . Además, O. Häggström, Y. Peres y R.H. Schonmann prueban en [10] la existencia de un nuevo valor crítico  $p_u$  que limita inferiormente una *fase de unicidad*  $p_u < p$  donde existe un único clúster infinito (con probabilidad 1):



El objetivo de este trabajo consiste en extender el proceso de percolación de Bernoulli a un pseudogrupo de transformaciones no singulares  $\Gamma$  sobre un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$  dotado de un sistema finito de generadores  $\Sigma$ . El interés por los pseudogrupos viene motivado por el concepto de pseudogrupo de holonomía ([9]) que constituye una adecuada discretización del concepto de laminación. El sistema  $\Sigma$  proporciona una estructura de grafo sobre las órbitas de  $\Gamma$  de modo análogo a la construcción del grafo de Cayley de un grupo. El proceso de percolación de Bernoulli de parámetro  $p \in [0, 1]$  sobre el pseudogrupo grafado  $(\Gamma, \Sigma)$  consiste en hacer percolación sobre las aristas de cada órbita de  $\Gamma$  con independencia unas de otras. Ahora, el objetivo es estudiar la naturaleza y propiedades de los clústeres de las órbitas genéricas respecto de  $\mu$ . Debido a que éstas carecen de la homogeneidad propia de los grafos de Cayley, las herramientas clásicas no son aplicables en nuestro contexto. No obstante, probamos que la percolación crítica de las órbitas varía de manera medible y en el caso ergódico, existe un valor crítico  $p_c(\Gamma)$  que divide el proceso en una *fase subcrítica*  $p < p_c(\Gamma)$  donde los clústeres de casi toda órbita son finitos y una *fase supercrítica*  $p > p_c(\Gamma)$  donde casi toda órbita contiene un clúster infinito:



En este contexto, el estudio de los clústeres resulta más complicado que en el caso clásico. No obstante, cuando la medida considerada es armónica y ergódica, podemos obtener información sobre el número de clústeres infinitos de pseudogrupos cuyas órbitas tienen más de un final. Las principales herramientas son la Proposición fundamental de E. Ghys [7] y la versión discreta del Lema de la hipersuperficie de E. Ghys descrita por F. Paulin en [16]. Los resultados que presentamos muestran la analogía con los resultados clásicos sobre grafos de Cayley según los cuales  $p_c = 1$  si el grafo tiene 2 finales y  $p_u = 1$  si tiene una infinidad de finales ([13]).

**Teorema 1.** *Si la medida  $\mu$  es armónica y ergódica y  $\mu$ -casi toda órbita tiene 2 finales, entonces  $p_c(\Gamma) = 1$ .*

**Teorema 2.** *Si la medida  $\mu$  es armónica y ergódica y  $\mu$ -casi toda órbita tiene un Cantor de finales, entonces para  $p_c(\Gamma) < p < 1$ , existe una infinidad de clústeres infinitos en  $\mu$ -casi toda órbita.*

## 2. Teoría clásica de la percolación de Bernoulli

### 2.1. Grafos

Un grafo es un par  $\mathcal{G} = (V, E)$  formado por un conjunto de vértices  $V \neq \emptyset$  y un conjunto de aristas  $E$  dotado de una aplicación de  $E$  en  $V \times V$  que envía cada arista  $e \in E$  en un par  $(v_1, v_2) \in V \times V$ . Si la aplicación es inyectiva, se dice que  $\mathcal{G}$  carece de aristas múltiples y las aristas se identifican con sus extremos. Un lazo es una arista cuyos extremos coinciden. La *valencia*  $val(v)$  de un vértice  $v$  es el número de aristas que unen dicho vértice con sus vecinos. Un grafo se dice *localmente finito* si la valencia es finita en cada vértice y de *geometría acotada* si la valencia está uniformemente acotada.

Un camino en un grafo es una sucesión de vértices tal que cada par de elementos consecutivos son extremos de una arista de  $E$ . La *longitud* de un camino es el número de aristas que lo forman. Se llama *ciclo* a todo camino finito  $\{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $v_1 = v_n$ . Un grafo se dice *conexo* si dos vértices arbitrarios están siempre unidos por un camino. Un *árbol* es un grafo conexo sin aristas múltiples, sin lazos y sin ciclos.

Un grafo  $\mathcal{G}$  está dotado de una *métrica* natural  $d$  tal que la distancia entre dos vértices es el mínimo de las longitudes de los caminos que los unen. La distancia entre vértices se puede extender a puntos cualesquiera dotando a cada arista de la métrica que la hace isométrica al intervalo  $[0, 1]$  o la circunferencia  $\mathbb{S}^1$  en el caso de un lazo. Un camino *geodésico* es aquel que minimiza la distancia entre sus extremos.

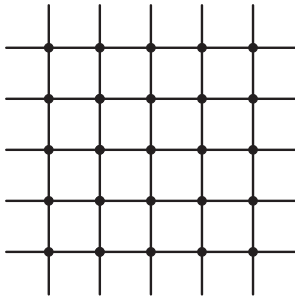
**Grafos de Cayley.** Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $S$  un sistema finito de generadores simétrico ( $S = S^{-1}$ ) que no contiene el elemento neutro 1. El grafo de Cayley  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$  es un grafo conexo localmente finito cuyos vértices son los elementos de  $G$  y dos vértices  $g_1$  y  $g_2$  están unidos por una arista si y

sólo si  $g_1^{-1}g_2 \in S$ . Se llama *longitud* de un elemento  $g$  de  $G$  al número mínimo de generadores de  $S$  necesarios para escribir  $g$  y se define la *distancia de las  $S$ -palabras* entre dos elementos  $g_1$  y  $g_2$  de  $G$  como  $d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2)$ .

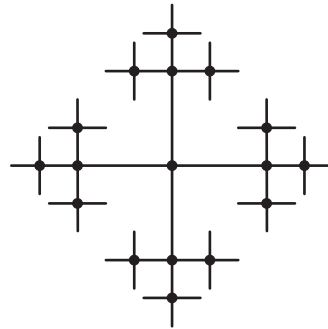
**Ejemplos 2.1.1** Presentamos a continuación algunos ejemplos de grafos de Cayley.



$G = \mathbb{Z}, S = \{\pm 1\}$ .

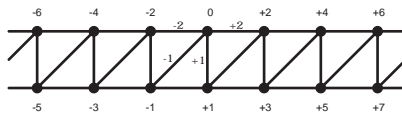


$G = \mathbb{Z}^2, S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ .



$G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

Nótese que el grafo de Cayley depende del sistema de generadores considerado, como podemos observar en la figura siguiente:



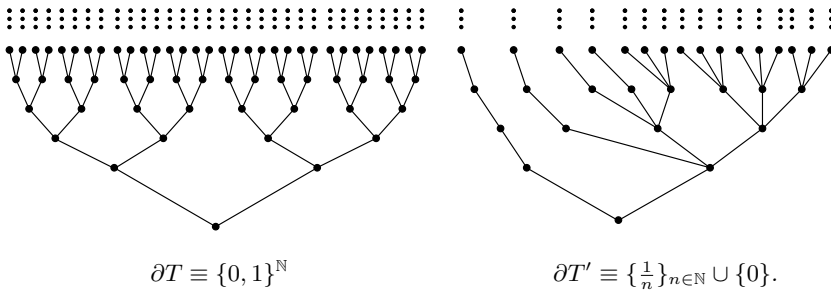
$G = \mathbb{Z}, S = \{\pm 1, \pm 2\}$ .

**Espacio de finales de un grafo.** Un *rayo* de un grafo conexo e infinito  $\mathcal{G}$  es una aplicación  $r : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{G}$  continua y propia. Se dice que  $r$  es un *rayo geodésico* si además es una isometría. El espacio de finales de  $\mathcal{G}$  se define a través de una relación de equivalencia sobre el conjunto de rayos sobre el grafo.

**Definición 2.1.2** Dos rayos  $r$  y  $r'$  *convergen al mismo final* si para todo compacto  $K \subset \mathcal{G}$  existe un entero  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $r([N, \infty))$  y  $r'([N, \infty))$  pertenecen a la misma componente conexa de  $\mathcal{G} - K$ . La clase de equivalencia de un rayo  $r$  se denota  $\mathcal{E}(r)$  y el conjunto de clases de equivalencia  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  se denomina *espacio de finales* de  $\mathcal{G}$ .

Para definir una topología sobre  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  basta con describir la convergencia entre finales. Una sucesión  $\mathcal{E}(r_n) \rightarrow \mathcal{E}(r)$  si y sólo si para cada compacto  $K \subset \mathcal{G}$  existe una sucesión de enteros  $N_n$  tal que  $r_n([N_n, \infty))$  y  $r([N_n, \infty))$  pertenecen a la misma componente conexa de  $\mathcal{G} - K$  para todo  $n \geq n_0$  con  $n_0$  suficientemente grande. Luego un conjunto  $B \subset \mathcal{E}(\mathcal{G})$  es cerrado si para cada sucesión  $\mathcal{E}(r_n) \in B$  verificando  $\mathcal{E}(r_n) \rightarrow \mathcal{E}(r)$  se tiene que  $\mathcal{E}(r) \in B$ .

**Ejemplo 2.1.3** En el caso de un árbol, el espacio de finales  $\mathcal{E}(T)$  coincide con el borde geométrico  $\partial T$  formado por todos los rayos geodésicos de  $T$  que parten de un vértice fijado. Presentamos a continuación dos árboles con espacios de finales muy diferentes:



El espacio de finales del árbol  $T$  no tiene puntos aislados, todos son puntos de acumulación. De hecho  $\partial T$  es un conjunto de Cantor. El espacio de finales del segundo árbol  $T'$  sí posee puntos aislados y un único punto de acumulación.

**Espacio de finales de un grafo de Cayley.** Si  $S$  y  $S'$  son dos conjuntos finitos de generadores de un grupo  $G$ , entonces los espacios de finales de los correspondientes grafos de Cayley  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$  y  $\mathcal{E}(\mathcal{G}')$  son homeomorfos (véase [3]). El teorema de Hopf ([11]) proporciona más información sobre el espacio de finales de los grafos de Cayley de un grupo finitamente generado:

**Teorema 2.1.4** *Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $S$  un sistema finito de generadores de  $G$ . El grafo de Cayley  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$  tiene 0, 1, 2 o un conjunto de Cantor de finales.*

**Ejemplo 2.1.5** Los grafos del ejemplo 2.1.1 tienen espacios de finales muy distintos: el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}$  tiene 2 finales, el de  $\mathbb{Z}^2$  tiene un final y el del grupo libre  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  tiene un Cantor de finales.

## 2.2. Percolación de Bernoulli sobre grafos

Sea  $\mathcal{G} = (V, E)$  un grafo infinito, numerable y localmente finito. El proceso de *percolación de Bernoulli* con parámetro de permanencia  $p \in [0, 1]$  consiste en mantener cada arista de  $E$  con probabilidad  $p$  o eliminarla con probabilidad  $1 - p$ , de manera independiente unas de otras (véase [8],[13]).

**Definición 2.2.1** El *proceso de percolación de Bernoulli* (de aristas) de parámetro  $p \in [0, 1]$  sobre un grafo infinito  $\mathcal{G} = (V, E)$  viene dado por el *espacio de coloreados*  $\Omega = \{0, 1\}^E$  sobre el conjunto de aristas  $E$ , dotado de la  $\sigma$ -álgebra generada por los cilindros

$$C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n} = \{ \omega \in \Omega \mid \omega(e_i) = \alpha_i, i \in \{0, \dots, n\} \},$$

con  $e_i \in E, \alpha_i \in \{0, 1\}$  y de la medida  $P_p$  de percolación sobre  $\Omega$  obtenida como producto de las medidas de Bernoulli con pesos  $p$  y  $1 - p$  sobre 1 y 0 en cada arista, dada por

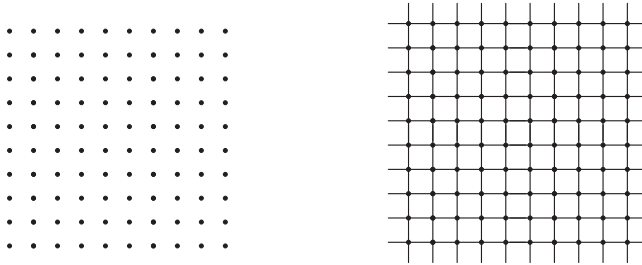
$$P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = p^m (1 - p)^{(n+1) - m}, \tag{1}$$

donde  $m = \sum_{i=0}^n \alpha_i$ .

Dado un coloreado  $\omega \in \Omega$ , diremos que una arista  $e \in E$  está *abierta* si  $\omega(e) = 1$  y *cerrada* si  $\omega(e) = 0$ . Cada coloreado  $\omega \in \Omega$  define un subgrafo  $\mathcal{G}_\omega$  de  $\mathcal{G}$  cuyo conjunto de vértices es  $V$  y cuyo conjunto de aristas está formado por las aristas abiertas de  $\omega$ , es decir, las aristas  $e \in E$  tales que  $\omega(e) = 1$ . En general el grafo  $\mathcal{G}_\omega$  es no conexo y llamamos *clúster* a cada una de sus componentes conexas. Para cada  $v \in V$ , denotamos  $C_\omega(v)$  al clúster de  $\mathcal{G}_\omega$  que contiene al vértice  $v$ .

**Ejemplo 2.2.2** Sea  $\mathcal{G} = (V, E)$  un grafo infinito conexo. Si hacemos percolación de Bernoulli de parámetro  $p = 0$ , la medida  $P_0$  se concentra en un único coloreado  $\omega$  tal que  $\omega(e) = 0$  para todo  $e \in E$ . Es decir,  $\mathcal{G}_\omega$  es (con probabilidad 1) el subgrafo de  $\mathcal{G}$  formado únicamente por los vértices. Los clústeres se reducen a los vértices.

Cuando tomamos el parámetro  $p = 1$ , hay un único coloreado con probabilidad total dado por  $\omega(e) = 1$  para todo  $e \in E$ . En este caso,  $\mathcal{G}_\omega$  coincide con  $\mathcal{G}$  (con probabilidad 1) y el único clúster es  $\mathcal{G}$ .



*Percolación de Bernoulli del grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  con parámetro  $p = 0$  y  $p = 1$ .*

La teoría de la percolación estudia básicamente la naturaleza y propiedades del subgrafo aleatorio  $\mathcal{G}_\omega$  y de sus componentes conexas, prestando especial interés a la existencia de clústeres infinitos. Una cuestión interesante para comenzar el estudio de los clústeres es conocer de qué modo varía el proceso de

percolación de Bernoulli cuando hacemos variar el parámetro  $p$  a lo largo del intervalo  $[0, 1]$ . Para ello, se hace uso del proceso de "standard coupling", cuyo interés reside en la capacidad de englobar todos los procesos de percolación de Bernoulli en un único proceso.

**Proceso de Standard Coupling.** Se sustituye el espacio de coloreados  $\Omega = \{0, 1\}^E$  por el espacio  $X = [0, 1]^E$  dotado de la medida producto  $\mu$  de la medida de Lebesgue sobre  $[0, 1]$  en cada arista. Cada elemento de  $X$  determina un grafo coloreado donde los colores blanco y negro se sustituyen por toda la gama de grises. Para cada  $p \in [0, 1]$ , definimos la aplicación  $\eta_p : [0, 1]^E \rightarrow \{0, 1\}^E$  como

$$\eta_p(x)(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(e) \leq p, \\ 0 & \text{si } x(e) > p, \end{cases}$$

que verifica  $(\eta_p)_*\mu = P_p$ . Obviamente, si  $p_1 \leq p_2$ , entonces

$$\eta_{p_1}(x) \leq \eta_{p_2}(x).$$

Este proceso es conocido como *standard coupling* y nos permite comparar procesos de percolación de Bernoulli de parámetros diferentes. En efecto, cuando  $p_1 \leq p_2$  el conjunto de aristas abiertas del primer proceso está contenido en el conjunto de aristas abiertas del segundo.

**Tolerancia a la inserción y al borrado.** La percolación de Bernoulli es un ejemplo de percolación tolerante a la inserción y al borrado de aristas. Es decir, si abrimos (o cerramos) una arista en un conjunto de coloreados con medida positiva, el conjunto que resulta sigue siendo de medida positiva.

Sea  $\mathcal{G} = (V, E)$  un grafo infinito y sea  $(\Omega, P_p)$  el proceso de percolación de Bernoulli sobre  $\mathcal{G}$  de parámetro  $p \in [0, 1]$ .

**Definición 2.2.3** Se define la *aplicación de inserción*  $i_{e'} : \Omega \rightarrow \Omega$  de una arista  $e' \in E$  como

$$i_{e'}(\omega)(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e', \\ \omega(e) & \text{si } e \neq e'. \end{cases}$$

De modo análogo se define la *aplicación de borrado*  $d_{e'} : \Omega \rightarrow \Omega$  de una arista  $e' \in E$  como

$$d_{e'}(\omega)(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = e', \\ \omega(e) & \text{si } e \neq e'. \end{cases}$$

**Definición 2.2.4** Se dice que la medida  $P_p$  es *tolerante a la inserción* (resp. *tolerante al borrado*) si para cada arista  $e \in E$  y para todo conjunto boreliano  $B \subset \Omega$  tal que  $P_p(B) > 0$  se tiene

$$P_p(i_e(B)) > 0, \text{ (resp. } P_p(d_e(B)) > 0).$$

La medida de probabilidad  $P_0$  no es tolerante a la inserción ni la medida  $P_1$  es tolerante al borrado. No obstante, para el resto de valores de  $p$  se dan ambas propiedades:

**Proposición 2.2.5** Para cada  $p \in (0, 1)$ , la medida de probabilidad  $P_p$  es tolerante a la inserción y al borrado.

**Demostración.** Sea  $e \in E$  la arista que queremos insertar. Nótese que para los distintos tipos de cilindros se tiene que el valor  $P_p(i_e(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}))$  es igual a

- $P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n})$ , si  $e_i = e$ , y  $\alpha_i = 1$  para algún  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,
- $pP_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n})$ , si  $e_i \neq e$  para todo  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,
- $\frac{p}{1-p}P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n})$ , si  $e_i = e$ , y  $\alpha_i = 0$  para algún  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Para cualquier boreliano  $B \subset \Omega$  verificando  $P_p(B) > 0$  se tiene

$$P_p(i_e(B)) > mP_p(B) > 0,$$

donde  $m = \min\{p, \frac{p}{1-p}\}$ . La prueba de la tolerancia al borrado es análoga.  $\square$

### 2.3. Percolación crítica.

El objetivo principal de la teoría de la percolación es estudiar la probabilidad de que exista al menos una componente infinita en el subgrafo aleatorio obtenido tras la percolación. Con ese fin, se estudia primero la probabilidad de que el clúster de un vértice fijado sea infinito.

**Definición 2.3.1** Dado un vértice  $v \in \mathcal{G}$ , se define la función  $\theta_v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  como

$$p \mapsto \theta_v(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid C_\omega(v) \text{ es infinito}].$$

En algunas ocasiones escribiremos  $\theta_v(p)$  como  $P_p[v \leftrightarrow \infty]$ . Usando el proceso de standard coupling, se comprueba que  $\theta_v$  es monótona creciente con respecto a  $p$ . Además, para todo par de vértices  $v, v' \in V$ , se verifica

$$\theta_v(p) = 0 \iff \theta_{v'}(p) = 0.$$

En efecto, si  $\theta_v(p) > 0$ , basta insertar un camino de aristas finito  $\{e_0, \dots, e_n\}$  que una  $v$  con  $v'$  de manera que

$$\theta_{v'}(p) \geq P_p[i_{\{e_0, \dots, e_n\}}(\omega \in \Omega \mid C_\omega(v) \text{ es infinito})] > 0.$$

Estudiamos ahora la probabilidad de existan clústeres infinitos:

**Definición 2.3.2** Sea  $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función definida como

$$p \mapsto \theta(p) = P_p[\omega \in \Omega \mid \exists C_\omega \text{ infinito}].$$



Para cada vértice  $v \in V$ , se verifica

$$\theta_v(p) \leq \theta(p) \leq \sum_{v \in V} \theta_v(p).$$

La monotonía de  $\theta$  con respecto a  $p$  se deduce de la monotonía de  $\theta_v$ . Además, el evento considerado es independiente de cualquier conjunto finito de aristas, luego  $\theta(p)$  es igual a 0 ó 1 por la ley 0-1 de Kolmogorov. Por tanto, para cualquier  $v \in V$ ,

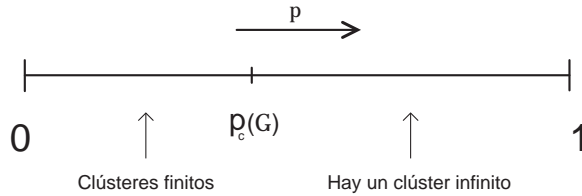
$$\theta(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta_v(p) = 0 \\ 1 & \text{si } \theta_v(p) > 0 \end{cases}$$

De las propiedades anteriores se deduce la existencia de un valor crítico  $p_c(\mathcal{G})$  a partir del cual la probabilidad de que haya un clúster infinito pasa de ser nula a ser total:

**Definición 2.3.3** Se define la *percolación crítica* del grafo  $\mathcal{G}$  como

$$p_c(\mathcal{G}) = \sup\{p \in [0, 1] \mid \theta(p) = 0\} = \inf\{p \in [0, 1] \mid \theta(p) = 1\}$$

En resumen, la percolación crítica divide el intervalo  $[0, 1]$  en dos fases. En la *fase subcrítica* con  $p < p_c(\mathcal{G})$  todos los clústeres son finitos (con probabilidad 1), mientras que en la *fase supercrítica* con  $p > p_c(\mathcal{G})$  existe al menos un clúster infinito (con probabilidad 1). (No obstante, en la transición de fase  $p = p_c(\mathcal{G})$  puede darse cualquiera de los dos casos anteriores, véase [8]).



**Proposición 2.3.4** Sea  $\mathcal{G}'$  un subgrafo de  $\mathcal{G}$ , entonces  $p_c(\mathcal{G}) \leq p_c(\mathcal{G}')$ .

**Demostración.** Para  $p > p_c(\mathcal{G}')$ , hay un clúster infinito en  $\mathcal{G}'$  (con probabilidad 1) y en consecuencia  $\mathcal{G}$  posee un clúster infinito. Luego  $p_c(\mathcal{G}) \leq p_c(\mathcal{G}')$ .  $\square$

**Ejemplos 2.3.5** El cálculo del valor crítico  $p_c$  no es sencillo y en la mayoría de los grafos se desconoce su valor. Presentamos a continuación algunos ejemplos:

1. El grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}$  verifica  $p_c(\mathcal{Z}) = 1$ . En efecto, para  $p < 1$ , existe una infinidad de aristas cerradas a la izquierda y a la derecha del origen (con probabilidad 1), luego todos los clústeres son finitos.
2. El grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  verifica  $p_c(\mathcal{Z}^2) = \frac{1}{2}$  (véase [8]). Además, en la fase supercrítica  $p > \frac{1}{2}$  existe un único clúster infinito (con probabilidad 1).

3. No se conoce el valor de la percolación crítica del grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^d$  para  $d > 2$ . No obstante, por la proposición 2.3.4, se deduce que  $0 < p_c(\mathbb{Z}^d) < 1$  y  $p_c(\mathbb{Z}^{d+1}) \leq p_c(\mathbb{Z}^d)$ .
4. Si el grafo considerado es un árbol  $T$ , entonces  $p_c(T) = \frac{1}{br(T)}$  donde  $br(T)$  es el número de ramificación de  $T$  (véase [13]). Además, hay una infinidad de clústeres infinitos en la fase supercrítica  $p > p_c(T)$  ([17]).

## 2.4. Percolación de Bernoulli en grafos de Cayley

La homogeneidad que caracteriza a los grafos de Cayley permite obtener mayor información acerca de los clústeres del proceso de percolación. Sea  $G$  un grupo finitamente generado,  $S$  un sistema finito de generadores y  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$  el grafo de Cayley correspondiente. La acción por traslaciones de  $G$  sobre  $\mathcal{G}$  se extiende de manera natural a una acción de  $G$  sobre el espacio de coloreados  $\Omega$  dada por

$$g\omega(e) = \omega(g^{-1}(e)).$$

**Proposición 2.4.1** *Para todo  $p \in [0, 1]$ , la medida  $P_p$  sobre  $\Omega$  es invariante respecto de la acción de  $G$ , es decir,*

$$P_p(gA) = P_p(A)$$

para todo  $g \in G$  y para todo boreliano  $A \subset \Omega$ .

**Demostración.** Basta probar la invarianza de  $P_p$  sobre los cilindros. Sea  $g \in G$ ,

$$P_p(gC_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = P_p(C_{g^{-1}e_0, \dots, g^{-1}e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = p^m(1-p)^{(n+1)-m} = P_p(C_{e_0, \dots, e_n}^{\alpha_0, \dots, \alpha_n})$$

para  $e_0, \dots, e_n \in E$ ,  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$  y  $m = \sum_{i=0}^n \alpha_i$ . □

**Proposición 2.4.2** *Para todo  $p \in [0, 1]$ , la medida de probabilidad  $P_p$  sobre  $\Omega$  es ergódica respecto de la acción de  $G$ .*

**Demostración.** Si se prueba que todo boreliano saturado  $A \subset \Omega$  verifica  $P_p(A) = P_p(A)^2$  y en consecuencia  $P_p(A) \in \{0, 1\}$ , se deduce la ergodicidad.

Sean  $B_1, B_2$  y  $D$  subconjuntos borelianos arbitrarios de  $\Omega$ . Entonces

$$|P_p(B_1 \cap D) - P_p(B_2 \cap D)| \leq P_p[(B_1 \cap D) \Delta (B_2 \cap D)] \leq P_p(B_1 \Delta B_2).$$

donde  $B_1 \Delta B_2 = (B_1 \cup B_2) - (B_1 \cap B_2)$ . Por otra parte, si  $A$  es un boreliano saturado en  $\Omega$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe un cilindro  $C$  verificando que

$$P_p(A \Delta C) < \varepsilon$$

y un elemento  $g \in G$  tal que  $C$  y  $gC$  son sucesos independientes. Luego

$$\begin{aligned} |P_p(A) - P_p(A)^2| &= |P_p(A \cap gA) - P_p(A)^2| \\ &\leq |P_p(A \cap gA) - P_p(C \cap gA)| + |P_p(C \cap gA) - P_p(C \cap gC)| \\ &\quad + |P_p(C \cap gC) - P_p(C)^2| + |P_p(C)^2 - P_p(A)^2| \\ &\leq P_p(A \Delta C) + P_p(gA \Delta gC) + |P_p(C)P_p(gC) - P_p(C)^2| \\ &\quad + |P_p(C) - P_p(A)|(P_p(C) + P_p(A)) \\ &< 4\varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Número de clústeres infinitos.** De la invarianza y ergodicidad de la medida de probabilidad  $P_p$  respecto de la acción del grupo sobre el espacio de coloreados, se deduce que sólo puede darse una de las siguientes posibilidades: o bien todas las componentes conexas son finitas, o bien existe una única componente infinita, o bien existe una infinidad de componentes infinitas.

Para cada  $p \in [0, 1]$  se define la aplicación  $N_p : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  que asigna a cada coloreado  $\omega$  el número de clústeres infinitos  $N_p(\omega)$  de  $\mathcal{G}_\omega$ .

**Teorema 2.4.3** ([15]) *Sea  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$  un grafo de Cayley. Dado  $p \in [0, 1]$ , existe  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  tal que:*

$$P_p[\omega \in \Omega \mid N_p(\omega) = k] = 1.$$

Además,  $k \in \{0, 1, \infty\}$ .

**Demostración.** Es sabido que la aplicación  $N_p$  es medible y constante sobre las órbitas de la acción de  $G$  sobre  $\Omega$  (véase [15]). De la ergodicidad de  $P_p$  se deduce que  $N_p$  es constante en casi todo coloreado  $\omega \in \Omega$ . Ahora, basta ver que  $N_p \notin [2, \infty)$  por reducción al absurdo. Supongamos entonces que casi todo coloreado tiene exactamente  $k$  clústeres infinitos con  $k > 2$  y  $k \neq \infty$ . Puesto que el conjunto de bolas centradas en el origen es numerable, existe una bola suficientemente grande  $B$  y un conjunto  $\Omega_B \subset \Omega$  de medida positiva, tales que  $B$  interseca a cada coloreado  $\omega \in \Omega_B$  en al menos dos clústeres infinitos. Usando tolerancia a la inserción, el boreliano  $i_B(\Omega_B)$  tiene medida positiva. Se obtiene así la contradicción deseada, pues  $i_B(\Omega_B)$  está formado por coloreados con a lo sumo  $k - 1$  clústeres infinitos, de manera que  $N_p$  no es constante en casi todo coloreado. □

**Fase de unicidad.** El proceso de percolación de Bernoulli sobre un grafo de Cayley se divide en tres fases: la *fase de finitud* donde todos los clústeres son finitos (con probabilidad 1); la *fase de no unicidad* donde existe una cantidad infinita de clústeres infinitos (con probabilidad 1); y la *fase de unicidad* donde hay un único clúster infinito (con probabilidad 1).

En efecto, el siguiente teorema prueba que si existe un único clúster infinito con casi total seguridad para un parámetro  $p_1$ , entonces sucede lo mismo para todo  $p_2 > p_1$ :

**Teorema 2.4.4** ([10]) *Sea  $\mathcal{G}$  un grafo de Cayley y sea  $p_c(\mathcal{G}) < p_1 < 1$  tal que*

$$P_{p_1}[\omega \in \Omega \mid \exists^\circ C_\omega \text{ infinito}] = 1.$$

*Entonces, para cada  $p_2 > p_1$ :*

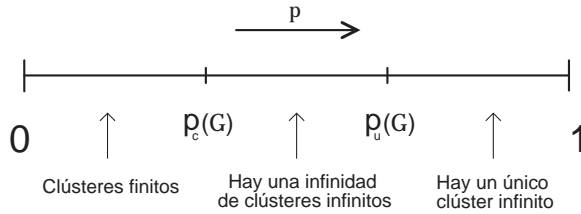
$$P_{p_2}[\omega \in \Omega \mid \exists^\circ C_\omega \text{ infinito}] = 1.$$

Para probar el teorema, se usa el proceso de standard coupling. En particular, se utiliza que si  $p_c(\mathcal{G}) < p_1 < p_2$ , entonces cada  $p_2$ -clúster infinito contiene un  $p_1$ -clúster infinito casi seguro. Como consecuencia del teorema anterior, existe un valor crítico  $p_u(\mathcal{G}) \in [p_c(\mathcal{G}), 1]$  que limita inferiormente una nueva fase llamada *fase de unicidad*, en la que existe un único clúster infinito:

**Definición 2.4.5** *Sea  $\mathcal{G}$  un grafo de Cayley y sea  $\Omega$  el espacio de coloreados sobre las aristas de  $\mathcal{G}$ . Se define el valor crítico*

$$p_u(\mathcal{G}) = \inf\{p \in [0, 1] \mid P_p[\omega \in \Omega \mid \exists^\circ C_\omega \text{ infinito}] = 1\}.$$

En resumen, el proceso de percolación sobre un grafo de Cayley  $\mathcal{G}$  se divide en las tres fases siguientes separadas por los valores críticos  $p_c(\mathcal{G})$  y  $p_u(\mathcal{G})$ :



La fase de no unicidad puede no existir, los grafos de Cayley de grupos promediables son un ejemplo de ello. También puede suceder que la fase de unicidad se reduzca a un único punto, es decir,  $p_u(\mathcal{G}) = 1$ . Es el caso de los grafos de Cayley de grupos libres.

**Percolación de Bernoulli en grafos arbitrarios.** En general, los resultados mencionados para grafos de Cayley no son extensibles a grafos arbitrarios. No podemos asegurar la existencia de la fase de unicidad, ni siquiera podemos afirmar que para cada parámetro  $p$  el número de clústeres sea constante.

**Ejemplo 2.4.6** Sea  $T$  el árbol de Fibonacci con  $p_c(T) = 1/\Phi$ ,  $p_u(T) = 1$  y  $\mathcal{Z}^2$  el grafo de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$  con  $p_c(\mathcal{Z}^2) = p_u(\mathcal{Z}^2) = 1/2$ . Sea  $\mathcal{G}$  el grafo que resulta al unir  $T$  y  $\mathcal{Z}^2$  con una arista. Nótese que para  $1/2 < p < 1/\Phi$ , el número de clústeres infinitos es 1, mientras que para  $p > 1/\Phi$  hay una infinidad de clústeres infinitos.

**Ejemplo 2.4.7** Sean  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  dos copias de  $\mathcal{Z}^2$ . Consideramos el grafo  $\mathcal{G}$  que resulta de unir  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  por una arista  $e$ . Entonces, para todo  $p > 1/2$  el número de clústeres infinitos no es constante. En efecto, con probabilidad positiva puede haber un único clúster o 2 clústeres, dependiendo de que la arista  $e$  permanezca o desaparezca.

Todos los resultados vistos hasta ahora para grafos de Cayley pueden enunciarse en el contexto más general de los grafos transitivos (véase [13]).

**Resultados clásicos para grafos de Cayley.** Presentamos una recopilación de resultados clásicos de la teoría de la percolación de Bernoulli sobre grafos de Cayley relacionados con el crecimiento, el número de finales y la promediabilidad.

**Proposición 2.4.8** *Sea  $\mathcal{G}$  un grafo de Cayley. Si  $\mathcal{G}$  tiene crecimiento exponencial entonces  $p_c(\mathcal{G}) < 1$ .*

**Demostración.** En [12] se prueba que todo grafo de Cayley  $\mathcal{G}$  contiene un subárbol maximal subperiódico  $T$  tal que  $br(T) = gr(T) = gr(\mathcal{G})$ . Además, cuando  $\mathcal{G}$  tiene crecimiento exponencial,  $br(T) > 1$  y  $p_c(T) = \frac{1}{br(T)} < 1$ . Para finalizar, usando la proposición 2.3.4, se tiene que  $p_c(\mathcal{G}) < p_c(T) < 1$ .  $\square$

**Proposición 2.4.9** *Sea  $(G, S)$  un grupo finitamente generado y  $\mathcal{G}$  el grafo de Cayley asociado. Entonces:*

1. *Si  $\mathcal{G}$  tiene 2 finales,  $p_c(\mathcal{G}) = p_u(\mathcal{G}) = 1$ .*
2. *Si  $\mathcal{G}$  tiene un número infinito de finales,  $p_u(\mathcal{G}) = 1$ .*
3. *Si  $G$  es de presentación finita y  $\mathcal{G}$  tiene 1 final,  $p_c(\mathcal{G}) < 1$ .*

La prueba puede verse en [13].

**Teorema 2.4.10** ([4]) *Sea  $(G, S)$  un grupo finitamente generado y sea  $\mathcal{G}$  su grafo de Cayley asociado. Si  $G$  es promediable, entonces  $p_c(\mathcal{G}) = p_u(\mathcal{G})$ .*

El teorema original de [4] es enunciado para  $\mathbb{Z}^d$ . La prueba del caso general puede verse en [13].

Por último recordamos algunas propiedades de los clústeres infinitos de un grafo de Cayley. Los resultados siguientes forman parte de la prueba del *teorema de indistinguibilidad* de [14], según el cual los clústeres obtenidos por percolación son indistinguibles desde un punto de vista medible.

**Proposición 2.4.11** ([14]) *Los clústeres que poseen más de 3 finales no poseen finales aislados casi seguro.*

**Proposición 2.4.12** ([14]) *En la fase de no unicidad, los clústeres infinitos tienen una infinidad de finales casi seguro.*

**Proposición 2.4.13** ([14]) *En la fase de no unicidad, los clústeres infinitos son transitorios casi seguro.*

### 3. Percolación de Bernoulli en pseudogrupos grafados

#### 3.1. Pseudogrupos medibles

El concepto de pseudogrupo generaliza la noción de grupo de transformaciones. Nuestro interés por los pseudogrupos y sus propiedades está motivado por la noción de pseudogrupo de holonomía que juega un importante papel en la teoría de foliaciones.

Sea  $X$  un espacio boreliano estándar, es decir, dotado de una  $\sigma$ -álgebra isomorfa a la  $\sigma$ -álgebra de un espacio polaco (completamente metrizable y separable).

**Definición 3.1.1** Un *pseudogrupo de transformaciones medibles* sobre  $X$  es una familia  $\Gamma$  de isomorfismos entre conjuntos borelianos de  $X$  tales que:

1. Si  $\gamma : A \rightarrow B$  y  $\gamma' : A' \rightarrow B'$  pertenecen a  $\Gamma$  entonces la composición

$$\gamma' \circ \gamma : \gamma^{-1}(B \cap A') \rightarrow \gamma'(B \cap A')$$

pertenece a  $\Gamma$ .

2. Si  $\gamma \in \Gamma$ , entonces  $\gamma^{-1} \in \Gamma$ .
3. La aplicación identidad  $id_X$  pertenece a  $\Gamma$ .
4. Si  $\gamma : A \rightarrow B$  está localmente en  $\Gamma$ , es decir  $\gamma|_{A'} \in \Gamma$  para todo conjunto boreliano  $A' \subset A$ , entonces  $\gamma \in \Gamma$ .

La *órbita* de  $x \in X$  es el conjunto  $\Gamma(x) = \{\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma, x \in \text{dom}(\gamma)\}$ . Un boreliano  $B \subset X$  es *saturado* si es unión de órbitas y para cada boreliano  $A \subset X$  se define el *saturado de A* como  $\Gamma(A) = \bigcup_{x \in A} \Gamma(x)$ . Un *sistema de generadores* de  $\Gamma$  es una familia  $\Sigma \subset \Gamma$  verificando que para cada  $\gamma \in \Gamma$  y para todo  $x \in \text{dom}(\gamma)$  existe un entorno  $U \subset X$  de  $x$  tal que:

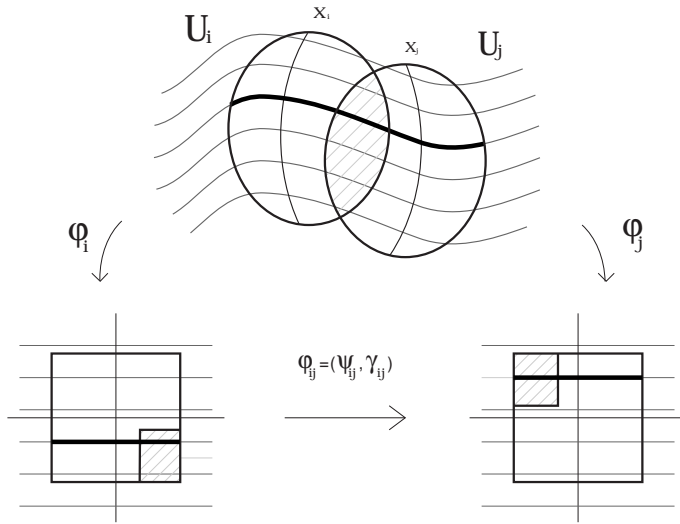
$$\gamma|_U = \sigma_{i_n} \circ \dots \circ \sigma_{i_0}|_U$$

donde  $\sigma_{i_j} \in \Sigma$  para  $j = 0, \dots, n$ . Se dice que  $\Gamma$  es un *pseudogrupo finitamente generado* si existe un sistema de generadores finito.

**Ejemplos 3.1.2** Los siguientes ejemplos ilustran la noción de pseudogrupo medible:

**Acciones de grupos.** Una acción boreliana de un grupo numerable  $G$  sobre un espacio boreliano estándar  $X$  define un pseudogrupo medible formado por las restricciones a borelianos de los isomorfismos borelianos  $\tau_g : X \rightarrow X$  donde  $\tau_g(x) = g \cdot x$  para  $x \in X$  y  $g \in G$ .

**Relaciones de equivalencia medibles discretas.** Una *relación de equivalencia medible discreta*  $\mathcal{R}$  sobre un espacio boreliano estándar  $X$  es una relación



cuyas clases  $\mathcal{R}[x]$  son numerables y el grafo  $\mathcal{R} \subset X \times X$  es un boreliano. Según un resultado de [5],  $\mathcal{R}$  está definida mediante la acción boreliana de un grupo numerable. Si llamamos *transformación parcial* de  $\mathcal{R}$  a cualquier isomorfismo boreliano  $\gamma : A \rightarrow B$  entre partes borelianas de  $X$  cuyo grafo

$$G(\gamma) = \{(x, y) \in X \times X \mid y = \gamma(x)\} \subset \mathcal{R},$$

entonces el pseudogrupo formado por las transformaciones parciales define  $\mathcal{R}$ .

**Pseudogrupo de Holonomía.** Una *laminación*  $\mathcal{L}$  de dimensión  $p$  de un espacio topológico  $M$  viene dada por un atlas foliado  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$  de abiertos distinguidos  $U_i$  y cartas locales  $\varphi_i : U_i \rightarrow D_i \times X_i$  donde  $D_i$  es un disco abierto de  $\mathbb{R}^p$  y  $X_i$  es un espacio topológico. Además, el cambio de cartas

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

viene dado por:

$$\varphi_i \varphi_j^{-1}(x, y) = (\psi_{ij}^y(x), \gamma_{ij}(y))$$

donde  $\gamma_{ij}$  es un homeomorfismo y  $\psi_{ij}^y$  un difeomorfismo que depende continuamente de  $y$  en la topología  $\mathcal{C}^0$ . Llamamos *transversal* a la unión disjunta  $X = \bigsqcup X_i$ . Los conjuntos  $P_i = \varphi_i^{-1}(D_i \times \{x\})$  son subvariedades de dimensión  $p$  llamadas *placas* que se solapan dando lugar a subvariedades conexas de dimensión  $p$  llamadas *hojas*. Siempre podemos suponer que el atlas foliado  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$  es *bueno*, es decir:

1.  $\mathcal{A}$  es localmente finito y numerable (finito si  $M$  compacto),
2. los abiertos  $U_i$  son relativamente compactos,
3. si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  entonces existe  $U_{ij}$  abierto distinguido tal que  $U_i \cup U_j \subset U_{ij}$ .

En este caso, los homeomorfismos locales  $\gamma_{ij}$  de  $X_i$  en  $X_j$  se extienden a un abierto maximal de  $X_i$  y generan un pseudogrupo  $\Gamma$  sobre  $X$  llamado *pseudogrupo de holonomía* de  $\mathcal{L}$ .

Si se supone que las transversales  $X_i$  son borelianos estándar en lugar de espacios topológicos, se tiene una *laminación boreliana* o medible (en el sentido de [2]) y el pseudogrupo de holonomía es medible.

**Medidas.** Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo medible actuando sobre un espacio de probabilidad  $(X, \mu)$ . Se dice que  $\mu$  es *invariante* si todos los elementos de  $\Gamma$  respetan  $\mu$ , es decir,

$$\gamma_*\mu(A) = \mu(\gamma^{-1}(A)) = \mu(A)$$

para todo  $\gamma \in \Gamma$  y para todo  $A \subset \text{dom}(\gamma^{-1})$  boreliano de  $X$ . Se dice que  $\mu$  es *casi-invariante* si los elementos de  $\Gamma$  respetan los conjuntos de medida nula

$$\mu(A) = 0 \quad \implies \quad \mu(\Gamma(A)) = 0.$$

En tal caso se dice que se trata de un *pseudogrupo de transformaciones no singulares* del espacio de probabilidad  $(X, \mu)$ . La medida  $\mu$  es *ergódica* si los conjuntos saturados son de medida nula o total, esto es,

$$\mu(\Gamma(A)) = 0 \quad \text{ó} \quad \mu(\Gamma(A)) = 1$$

para todo boreliano  $A \subset X$ . A partir de ahora, usaremos el término *genérico* para referirnos a conjuntos de medida total.

### 3.2. Pseudogrupos grafados

Sea  $\Gamma$  un pseudogrupo medible dotado de un sistema finito de generadores  $\Sigma$  actuando sobre un espacio boreliano estándar  $X$ . Se puede realizar cada órbita  $\Gamma(x)$  como conjunto de vértices de un grafo conexo  $\Gamma_\Sigma(x)$  denominado *grafo de Cayley de la órbita*, donde dos elementos  $y, z \in \Gamma(x)$  están unidos por una arista si y sólo si existe  $\sigma \in \Sigma$  tal que  $\sigma(y) = z$ . Cuando  $\Sigma$  es finito,  $\Gamma_\Sigma(x)$  es de geometría acotada, en particular localmente finito. Podemos dotar a cada órbita de una métrica natural como en el caso de los grafos de Cayley: la distancia  $d_\Sigma(y, z)$  entre dos puntos  $y$  y  $z$  de la misma órbita es el mínimo de los enteros  $k$  tales que  $z = \sigma_{i_k} \circ \dots \circ \sigma_{i_1}(y)$  con  $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k} \in \Sigma$ .

**Definición 3.2.1** Llamamos *pseudogrupo grafado* (finitamente generado) al par  $(\Gamma, \Sigma)$ . El boreliano  $E = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists \sigma \in \Sigma : y = \sigma(x)\}$  es el conjunto de aristas de la estructura de grafo disconexo no numerable sobre  $X$  cuyas componentes conexas son los grafos de Cayley de las órbitas  $\Gamma_\Sigma(x)$ .

**Ejemplos 3.2.2** Presentamos a continuación ejemplos básicos de pseudogrupos grafados:

**Acciones grafadas de grupos.** La acción boreliana de un grupo numerable  $G$  dotado de un sistema finito de generadores  $S$  sobre un espacio boreliano estándar



$X$  define un pseudogrupo grafado medible. El sistema de generadores formado por los isomorfismos borelianos  $\tau_s : X \rightarrow X$  con  $s \in S$  define la estructura grafada de las órbitas.

**Relaciones de equivalencia medibles discretas.** Una estructura grafada sobre las clases de una relación de equivalencia medible discreta  $(X, \mathcal{R})$  viene dada por un subconjunto medible simétrico  $E \subset \mathcal{R}$ , de manera que dos puntos  $x, y \in X$  están unidos por una arista si y sólo si  $(x, y) \in E$ . Llamamos *relación de equivalencia grafada* a  $(X, \mathcal{R}, E)$ . Denotamos  $\mathcal{R}_E[x]$  a la clase de equivalencia  $\mathcal{R}[x]$  dotada de la estructura de grafo  $E$ . Decimos que la estructura de grafo  $E$  es conexa si los grafos  $\mathcal{R}_E[x]$  son conexos. Toda estructura de grafo conexa  $E$  sobre  $(X, \mathcal{R})$  proviene de un pseudogrupo de transformaciones parciales.

**Pseudogrupo de holonomía grafado.** Si  $\mathcal{L}$  es una laminación boreliana, el conjunto de isomorfismos locales  $\gamma_{ij}$  descrito en el ejemplo 3.1.2 genera el pseudogrupo de holonomía y define una estructura de grafo sobre las órbitas.

### 3.3. Percolación de Bernoulli en pseudogrupos grafados

Sea  $(\Gamma, \Sigma)$  un pseudogrupo grafado finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar  $X$ , dotado de una medida casi-invariante  $\mu$ . El *proceso de percolación de Bernoulli* de parámetro  $p \in [0, 1]$  sobre  $(\Gamma, \Sigma)$  consiste en hacer percolación de Bernoulli sobre el grafo disconexo  $(X, E)$ . Es decir, cada arista de  $E$  se mantiene (o se borra) con probabilidad  $p$  (o  $1 - p$ ) de manera independiente. Nuestro objetivo es estudiar la existencia de clústeres infinitos en las órbitas genéricas. Para ello, estudiamos primero la probabilidad de que un punto pertenezca a un clúster infinito.

Para cada  $x \in X$ , denotamos  $E^x$  al conjunto de aristas de la órbita  $\Gamma_\Sigma(x)$  y  $(\Omega^x = \{0, 1\}^{E^x}, P_p^x)$  al proceso de percolación de Bernoulli de parámetro  $p \in [0, 1]$  sobre  $\Gamma_\Sigma(x)$  (véase la definición 2.2.1). Definimos la aplicación  $\theta(p) : X \rightarrow [0, 1]$  como

$$\theta_x(p) = P_p^x[x \leftrightarrow \infty] = \{\omega \in \Omega^x \mid C_\omega(x) \text{ infinito}\}.$$

**Proposición 3.3.1** *La aplicación  $\theta(p)$  es medible.*

**Demostración.** Basta probar que el conjunto:

$$\theta(p)^{-1}([0, a]) = \{x \in X \mid P_p^x[x \leftrightarrow \infty] \leq a\} = \{x \in X \mid P_p^x[x \leftrightarrow \infty] \geq 1 - a\}$$

es boreliano para  $a \in (0, 1]$ . Con ese fin, consideramos el conjunto numerable  $\mathfrak{B}$  de subgrafos finitos conexos con un punto base fijado y cuyas aristas están etiquetadas con elementos de  $\Sigma$ . Dado un punto  $x \in X$ , diremos que un grafo  $B \in \mathfrak{B}$  es *realizable* en la órbita  $\Gamma_\Sigma(x)$  si para todo camino  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  en  $B$  partiendo del punto base, se tiene que  $x \in \text{dom}(\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1)$  y  $x$  es un punto fijo de  $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_1$  si y sólo si el camino es un lazo. Llamaremos  $B_x$  al grafo realizado y denotamos  $X_B$  al conjunto boreliano formado por los puntos de  $X$  tales que  $B$  es realizable en su órbita.

Cada grafo finito  $B \in \mathfrak{B}$  tiene una cantidad finita de posibles bordes de aristas. Denotamos  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}$  al conjunto de los pares  $(B, F)$  donde  $B \in \mathfrak{B}$  es un grafo finito con borde  $F$  y llamamos  $X_{(B,F)}$  al boreliano de puntos de  $X$  tales que  $(B, F)$  es realizable en sus órbitas. En estos términos, para cada  $x \in X$ , el suceso  $[x \leftrightarrow \infty]$  se descompone en la unión disjunta:

$$\bigsqcup_{(B,F) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}} \{\omega \in \Omega^x \mid C_{\omega}(x) = B.x\} = \bigsqcup_{(B,F) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}} \{\omega \in \Omega^x \mid \omega(B) = 1, \omega(F) = 0\}.$$

Para cada  $(B, F) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}$  la aplicación  $f_{(B,F)} : X \rightarrow [0, 1]$  definida como

$$f_{(B,F)}(x) = P_p^x[\omega \in \Omega^x \mid \omega(B) = 1, \omega(F) = 0]$$

solo toma dos valores:

$$f_{(B,F)}(x) = \begin{cases} p^n(1-p)^m & \text{si } x \in X_{(B,F)}, \\ 0 & \text{si } x \notin X_{(B,F)}, \end{cases}$$

donde  $n$  y  $m$  son el número de aristas de  $B$  y  $F$  respectivamente. Como  $X_{(B,F)}$  es un boreliano, la aplicación  $f_{(B,F)}$  es también boreliana y podemos reescribir

$$\begin{aligned} \theta(p)^{-1}([0, a]) &= \{x \in X \mid P_p^x[x \leftrightarrow \infty] \geq 1 - a\} = \\ &= \{x \in X \mid \sum_{(B,F) \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}} f_{(B,F)}(x) \geq 1 - a\}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $\theta$  es medible. □

Definimos ahora la *aplicación de percolación*  $p_c : X \rightarrow [0, 1]$  que asigna a cada punto  $x$  la percolación crítica de su órbita, es decir,  $p_c(x) = p_c(\Gamma_{\Sigma}(x))$ .

**Proposición 3.3.2** *La aplicación de percolación  $p_c$  es boreliana y constante sobre las órbitas.*

**Demostración.** Por definición,  $p_c$  es constante sobre las órbitas. Para ver que es boreliana, basta probar que los conjuntos  $p_c^{-1}([0, a])$  son borelianos para cualquier  $a \in (0, 1]$ . En efecto,

$$\begin{aligned} p_c^{-1}([0, a]) &= \{x \in X \mid p_c(x) \leq a\} \\ &= \{x \in X \mid \sup\{p \in [0, 1] \mid P_p^x[x \leftrightarrow \infty] = 0\} \leq a\} \\ &= \bigcap_{q \in (a, 1]} \{x \in X \mid P_q^x[x \leftrightarrow \infty] > 0\}. \end{aligned}$$

La familia de los conjuntos  $\{x \in X \mid P_q^x[x \leftrightarrow \infty] > 0\}$  es contractiva cuando  $q \rightarrow a$ , luego expresamos la intersección usando una subfamilia numerable:

$$p_c^{-1}([0, a]) = \bigcap_{q \in (a, 1] \cap \mathbb{N}} \{x \in X \mid P_q^x[x \leftrightarrow \infty] > 0\} = \bigcap_{q \in (a, 1] \cap \mathbb{N}} \{x \in X \mid \theta_x(q) > 0\}.$$

Deducimos de la proposición 3.3.1 que se trata de un conjunto boreliano. □

**Proposición 3.3.3** Si la medida  $\mu$  es ergódica, entonces la aplicación  $p_c$  es constante en  $\mu$ -casi todo punto.

**Demostración.** Los conjuntos  $p_c^{-1}([a, 1])$  son saturados, luego tienen medida nula o total por ergodicidad. Denotamos

$$\mathfrak{b} = \inf\{a \in [0, 1] \mid \mu(p_c^{-1}([a, 1])) = 0\}.$$

Entonces  $p_c^{-1}((\mathfrak{b}, 1]) = \bigcup_{a \in (\mathfrak{b}, 1] \cap \mathbb{Q}} p_c^{-1}([a, 1])$  es de medida nula y  $p_c^{-1}([\mathfrak{b}, 1]) = \bigcap_{a \in [0, \mathfrak{b}] \cap \mathbb{Q}} p_c^{-1}([a, 1])$  es de medida total. Luego,  $p_c$  es constante igual a  $\mathfrak{b}$  casi por doquier.  $\square$

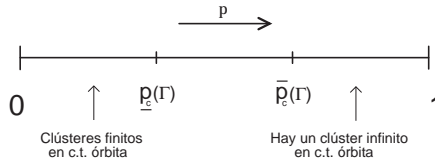
**Definición 3.3.4** Se define la *percolación crítica inferior* y la *percolación crítica superior* del pseudogrupo grafado  $(\Gamma, \Sigma)$  como

$$\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \inf \text{ess } \{p_c\}, \quad \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \sup \text{ess } \{p_c\},$$

donde

$$\begin{aligned} \inf \text{ess } \{p_c\} &= \sup\{a \in [0, 1] \mid \mu\{x \in X \mid p_c(x) < a\} = 0\}, \\ \sup \text{ess } \{p_c\} &= \inf\{b \in [0, 1] \mid \mu\{x \in X \mid p_c(x) > b\} = 0\}. \end{aligned}$$

Estos valores críticos diferencian tres fases en el proceso de percolación: para  $p < \underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ , los clústeres son finitos en  $\mu$ -casi toda órbita, mientras que en el caso  $p > \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ , se tiene que existe al menos un clúster infinito en  $\mu$ -casi toda órbita. En el caso intermedio  $\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p < \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu)$ , obtenemos una fase mixta.



**Proposición 3.3.5** Cuando la medida es ergódica, se verifica que

$$\underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = p_c(\Gamma_\Sigma(x))$$

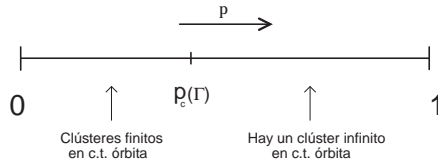
para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ .

La prueba es consecuencia directa de la proposición 3.3.3.

**Definición 3.3.6** Cuando la medida  $\mu$  es ergódica, definimos la *percolación crítica del pseudogrupo*  $(\Gamma, \Sigma)$  como

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \underline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = \overline{p}_c(\Gamma, \Sigma, \mu).$$

Luego, en el caso ergódico, el proceso de percolación es similar al de grafos, es decir, se divide en dos fases, la fase subcrítica y la supercrítica:



### 3.4. Espacio de finales y percolación crítica

En general, las órbitas de los pseudogrupos grafados carecen de la homogeneidad propia de los grafos de Cayley. No obstante, cuando la medida considerada es armónica respecto de un recorrido aleatorio (véanse [16] y [1]) y ergódica, E. Ghys prueba en [7] que las órbitas genéricas presentan cierta ‘periodicidad’ propia de los grafos de Cayley. Por el ejemplo, el siguiente teorema de E. Ghys ([7]) generaliza el teorema de Hopf para grupos. Presentamos la versión discreta de F. Paulin ([16]):

**Teorema 3.4.1** *Si  $(\Gamma, \Sigma)$  es un pseudogrupo grafado actuando sobre un espacio boreliano estándar  $(X, \mu)$  dotado de una medida armónica, entonces para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ , el grafo de Cayley de la órbita  $\Gamma_\Sigma(x)$  tiene 0, 1, 2 ó un conjunto de Cantor de finales.*

Cuando las órbitas genéricas del pseudogrupo respecto de una medida armónica tienen más de un final, podemos obtener información acerca del número de clústeres infinitos. Las herramientas principales son la Proposición fundamental y la versión discreta ([16]) del lema de la Hipersuperficie de Ghys ([7]):

**Proposición 3.4.2 (Proposición Fundamental)** *Sea  $(\Gamma, \Sigma)$  un pseudogrupo grafado sobre un espacio boreliano estándar  $(X, \mu)$  dotado de una medida armónica. Sea  $A$  un boreliano de  $X$ . Para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ , la intersección de  $A$  y  $\Gamma(x)$  o bien es vacía, o bien aproxima cualquier final de  $\Gamma_\Sigma(x)$ .*

**Proposición 3.4.3 (Lema de la hipersuperficie)** *Sea  $(\Gamma, \Sigma)$  un pseudogrupo grafado sobre un espacio boreliano estándar  $(X, \mu)$  dotado de una medida armónica. Supongamos que  $\mu$ -casi toda órbita tiene al menos dos (respectivamente tres) finales. Entonces existe un boreliano  $A$  de  $X$  de medida positiva, un grafo finito enraizado  $\mathcal{G}$  y una aplicación inyectiva medible  $\varphi : \mathcal{G} \times A \rightarrow X$  que envía  $(*, x)$  sobre  $x$  y tal que:*

1. *La aplicación  $\varphi$  induce un isomorfismo de  $\mathcal{G} \times \{x\}$  sobre un subgrafo  $\mathcal{G}.x$  de  $\Gamma_\Sigma(x)$ , para todo  $x \in A$ .*
2. *El espacio  $\Gamma_\Sigma(x) - \mathcal{G}.x$  posee al menos dos (respectivamente tres) componentes conexas no acotadas, para todo  $x \in A$ .*
3. *Para todo par  $x, y \in A$  tal que  $y \in \Gamma_\Sigma(x)$ , la distancia entre  $\mathcal{G}.x$  y  $\mathcal{G}.y$  es al menos 2.*

Utilizando la notación empleada en la proposición 3.4.3, denotamos

$$\mathcal{G}.A = \varphi(\mathcal{G} \times A) = \bigsqcup_{x \in A} \mathcal{G}.x.$$

Puesto que la medida  $\mu$  es armónica, podemos aplicar la proposición fundamental, de manera que, para casi todo  $x \in X$ ,

$$\mathcal{G}.A \cap \Gamma_{\Sigma}(x) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n^x$$

donde  $\{\mathcal{G}_n^x\}$  es una sucesión infinita de copias de  $\mathcal{G}$  disjuntas dos a dos que aproxima a los finales y que podemos ordenar en función de la distancia al punto  $x$ .

Recordemos además que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , el grafo  $\mathcal{G}_m^x$  desconecta a la órbita  $\Gamma_{\Sigma}(x)$  en al menos dos componentes conexas no acotadas. Si  $C_m^x$  es la componente conexa (acotada o no) de  $\Gamma_{\Sigma}(x) - \mathcal{G}_m^x$  que contiene al punto  $x$ , denotamos por  $U_m^x$  su complementario en la órbita, es decir

$$U_m^x = \Gamma_{\Sigma}(x) - C_m^x.$$

La demostración de nuestros resultados se basa en el siguiente lema cuya prueba puede verse en [6].

**Lema fundamental 3.4.4** *Sea  $\mathfrak{G}$  un grafo conexo infinito y  $\mathcal{G}$  un grafo finito. Supongamos que  $\mathfrak{G}$  contiene una cantidad infinita numerable de copias de  $\mathcal{G}$  disjuntas dos a dos que denotamos  $\{\mathcal{G}_n\}$ . Entonces para cada  $p \in (0, 1)$ , al realizar  $p$ -percolación de Bernoulli sobre  $\mathfrak{G}$  desaparecerá casi seguro una cantidad infinita de grafos  $\mathcal{G}_n$ .*

### 3.5. Pseudogrupos con 2 finales

Sabemos que los grafos de Cayley cuyas órbitas genéricas tienen dos finales no poseen clústeres infinitos para  $p < 1$ . En el caso armónico, sucede lo mismo para pseudogrupos cuyas órbitas genéricas tiene dos finales.

**Teorema 3.5.1** *Sea  $(\Gamma, \Sigma)$  un pseudogrupo grafado finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar  $X$  dotado de una medida de probabilidad  $\mu$  armónica y ergódica. Si  $\mu$ -casi toda órbita tiene 2 finales, entonces*

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1.$$

**Demostración.** Usaremos las notaciones del lema 3.4.3. Para casi todo  $x \in X$ , se tiene que

$$\mathcal{G}.A \cap \Gamma_{\Sigma}(x) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n^x$$

donde  $\mathcal{G}_n^x$  son copias de  $\mathcal{G}$  que desconectan a la órbita en dos componentes infinitas y aproximan los dos finales. Puesto que hay dos subsucesiones que convergen a cada uno de los finales, podemos reordenarlas y denotarlas  $\{\mathcal{G}_n^x\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  y  $\{\mathcal{G}_n^x\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$ , de manera que  $U_{n+1}^x \subset U_n^x$  si  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $U_{n-1}^x \subset U_n^x$  si  $n \in \mathbb{Z}^-$ .

Ahora, fijado el parámetro  $p \in (0, 1)$ , percolamos simultáneamente las órbitas del pseudogrupo. Por el lema fundamental 3.4.4, sabemos que en casi toda órbita  $\Gamma_\Sigma(x)$  desaparece una infinidad de grafos de las sucesiones  $\{\mathcal{G}_n^x\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  y  $\{\mathcal{G}_n^x\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$  con toda seguridad. Luego los clústeres son finitos en casi toda órbita, o equivalentemente,  $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) = 1$ .  $\square$

### 3.6. Pseudogrupos con un Cantor de finales

Cuando hacemos percolación clásica sobre un árbol  $T$ , obtenemos una infinidad de clústeres infinitos en la fase supercrítica  $p_c(T) < p < 1$  (véase [17]). Lo mismo sucede para grafos de Cayley con un Cantor de finales. Basándonos en las demostraciones clásicas y utilizando la estructura geométrica de las órbitas descrita en [16], probamos un resultado análogo para pseudogrupos grafados finitamente generados cuyas órbitas genéricas tienen un Cantor de finales respecto de una medida de probabilidad armónica ergódica.

**Teorema 3.6.1** *Sea  $(\Gamma, \Sigma)$  un pseudogrupo grafado finitamente generado que actúa sobre un espacio boreliano estándar  $X$ , dotado de una medida de probabilidad  $\mu$  armónica y ergódica. Supongamos que  $\mu$ -casi toda órbita tiene un Cantor de finales. Entonces, en la fase supercrítica  $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p < 1$ , existe una infinidad de clústeres infinitos en  $\mu$ -casi toda órbita.*

**Demostración.** Usando las notaciones del lema 3.4.3, consideramos el boreliano de medida positiva  $Y = X - \mathcal{G}.A \subset X$  y el subpseudogrupo grafado inducido  $(\Gamma_Y, \Sigma_Y)$  donde  $\Sigma_Y = \{\sigma|_Y : \text{dom}(\sigma) \cap Y \rightarrow \text{im}(\sigma) \cap Y \mid \sigma \in \Sigma\}$ . La estructura métrica de las órbitas de  $\Gamma_Y$  es la inducida por la de las órbitas de  $\Gamma$  sobre el boreliano  $Y$ . Llamamos  $\Gamma_Y(y)$  a la órbita grafada de  $\Gamma_Y$  en un punto  $y \in Y$  y denotamos  $\mu_Y$  a la medida de probabilidad inducida. Cada órbita del pseudogrupo de partida  $\Gamma$  contiene una infinidad numerable de órbitas del pseudogrupo  $\Gamma_Y$ .

Consideramos la aplicación de percolación  $p_c^Y : Y \rightarrow [0, 1]$  que asigna a cada punto  $y \in Y$  el valor  $p_c^Y(y) := p_c(\Gamma_Y(y))$ , y denotamos por  $\mathfrak{p}$  a la percolación crítica inferior del pseudogrupo  $\Gamma_Y$  (véase la definición 3.3.4)

$$\mathfrak{p} = \underline{p}_c(\Gamma_Y, \Sigma_Y, \mu_Y).$$

Además, puesto que la órbita  $\Gamma_Y(y)$  es un subgrafo de  $\Gamma_\Sigma(y)$  se verifica

$$p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) \leq \mathfrak{p}.$$

La prueba del teorema se divide en el estudio de los dos siguientes casos:

1.  $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p \leq \mathfrak{p}$ ,
2.  $p > \mathfrak{p}$ .

Aunque en ambos casos hay clústeres infinitos en las órbitas genéricas de  $\Gamma$ , en el primero los clústeres de las órbitas genéricas de  $\Gamma_Y$  son finitos, mientras que en el segundo hay un conjunto de medida positiva de órbitas de  $\Gamma_Y$  que poseen un clúster infinito. Veamos que en ambos las órbitas genéricas de  $\Gamma$  poseen una infinidad de clústeres infinitos.

- **Caso 2.** Si suponemos que  $p > \mathfrak{p}$ , el boreliano

$$C = p_c^{Y^{-1}}((\mathfrak{p}, p)) = \{y \in Y \mid \mathfrak{p} < p_c(\Gamma_Y(y)) < p\}$$

verifica  $\mu_Y(C) > 0$  y en consecuencia  $\mu(C) > 0$ . Por la proposición fundamental de E. Ghys, sabemos que  $C$  aproxima los finales de casi toda órbita de  $\Gamma$  debido a la armonicidad de  $\mu$ . Luego, para  $\mu$ -casi todo  $x \in X$ ,

$$\Gamma_\Sigma(x) \cap C = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} C_m^x$$

donde  $\{C_m^x\}$  es una sucesión infinita numerable de subgrafos infinitos conexos y disjuntos contenidos en  $\Gamma_\Sigma(x) - \mathcal{G}.A$ . Al borrar cualquier grafo  $\mathcal{G}_n^x$  de la órbita  $\Gamma_\Sigma(x)$ , separamos al menos dos subgrafos de la sucesión  $\{C_m^x\}$ .

Al hacer percolación de Bernoulli de parámetro  $p$  sobre las órbitas de  $\Gamma$ , obtenemos en cada componente  $C_m^x$  un clúster infinito ya que su percolación crítica es menor que  $p$ . Por otra parte, con total seguridad desaparece una cantidad infinita de los subgrafos  $\{\mathcal{G}_n^x\}$ . De manera que hay una infinidad de clústeres infinitos contenidos en los grafos  $C_m^x$  que permanecen disjuntos con total seguridad.

- **Caso 1.** Si suponemos que  $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < p \leq \mathfrak{p}$ , entonces hay clústeres infinitos en las órbitas genéricas de  $\Gamma$ , pero dichos clústeres no están contenidos en las componentes conexas de  $Y$  sino que intersecan infinitas veces el conjunto  $\mathcal{G}.A$ .

Consideremos  $p_c(\Gamma, \Sigma, \mu) < q < p$ . Para  $\mu$ -casi todo punto  $x \in X$ , tenemos entonces las siguientes propiedades:

i) Existe al menos un entero  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $p_c(U_n^x) \leq q$ . En efecto, si suponemos que  $p_c(U_n^x) > q$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces los clústeres de  $U_n^x$  son finitos y los clústeres infinitos de  $\Gamma_\Sigma(x)$  debe estar contenido en el complementario de  $\mathcal{G}.A$ . Por hipótesis esto no es posible.

ii) Existen dos componentes disjuntas no acotadas  $U_{n_0}^x$  y  $U_{m_0}^x$  verificando  $p_c(U_{n_0}^x), p_c(U_{m_0}^x) \leq q$ . Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que para todo par  $U_n^x, U_m^x$  con  $p_c(U_n^x), p_c(U_m^x) \leq q$  se tiene

$$U_n^x \cap U_m^x \neq \emptyset.$$

Tomando  $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid p_c(U_n^x) \leq q\}$  y aplicando el mismo razonamiento del punto (i) al subgrafo  $U_{n_0}^x$ , podemos considerar el menor natural  $n_1$  tal que  $U_{n_1}^x \subset U_{n_0}^x$  y  $p_c(U_{n_1}^x) \leq q$ . Reiterando el mismo argumento, obtenemos una subsucesión  $\{n_k\}$  tal que  $U_{n_{k+1}}^x \subset U_{n_k}^x$  y  $p_c(U_{n_k}^x) \leq q$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Además, para  $n \notin \{n_k\}$ ,  $p_c(U_n^x) > q$ . Obtenemos la contradicción deseada: hay al menos un clúster infinito en la órbita  $\Gamma_\Sigma(x)$  que posee un único final contenido en  $\bigcap_{n_k \in \mathbb{N}} U_{n_k}^x$ , de manera que todo camino de aristas infinito del clúster interseca a los grafos  $\mathcal{G}_{n_k}^x$ . Esto no es posible ya que desaparece una cantidad infinita de los grafos  $\mathcal{G}_{n_k}^x$  de acuerdo con el lema fundamental 3.4.4.

Una vez probadas las propiedades (i) y (ii), continuamos con la demostración manteniendo la notación de (ii). Aplicamos ahora al subgrafo  $U_{m_0}^x$  los mismos argumentos. Es decir, existen  $U_{n_1}^x, U_{m_1}^x \subset U_{m_0}^x$  disjuntos verificando

$$p_c(U_{n_1}^x), p_c(U_{m_1}^x) \leq q.$$

Procediendo de manera recurrente, obtenemos una sucesión de subgrafos  $\{U_{n_k}^x\}$  disjuntos dos a dos, separados entre sí por los grafos finitos  $\mathcal{G}_{n_k}^x$  y verificando  $p_c(U_{n_k}^x) \leq q$ . Para finalizar, hacemos percolación de parámetro  $p > q$  sobre las órbitas. Cada subgrafo  $U_{n_k}^x$  posee al menos un clúster infinito y por el lema fundamental 3.4.4 una infinidad de los grafos  $\mathcal{G}_{n_k}^x$  desaparecen, luego existe una cantidad infinita de clústeres infinitos.  $\square$

## Referencias

- [1] F. Alcalde, M.P. Fernández de Córdoba, Nombre de branchement d'un pseudogroupe. *Monats. Math.*, **163**, (2011), 389–414
- [2] M. Bermúdez. *Laminations boréliennes*, Thèse UCB-Lyon 1, 2004.
- [3] M. R. Bridson, A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [4] R. M. Burton, M. Keane, Density and uniqueness in percolation *Comm. Math. Phys.*, **121** (1989), 501–505.
- [5] J. Feldman, C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **234** (1977), 289–324.
- [6] M.P. Fernández de Córdoba, *Número de ramificación y percolación de un pseudogroupe*. Tesis de la Universidad de Santiago de Compostela, 2012.
- [7] E. Ghys, Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.*, **141** (1995), 387–422.
- [8] G. Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [9] A. Haefliger, Variétés feuilletés, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **16** (1962), 367–397



- [10] O. Häggström, Y. Peres, R.H. Schonmann, Percolation on transitive graphs as a coalescent process: Relentless merging followed by simultaneous uniqueness, in *Perplexing Problems in Probability (Papers in Honor of Harry Kesten)*. Birkhauser, Boston, 1999,69–90.
- [11] H. Hopf, Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. *Comment. Math. Helv.*, **16** (1944), 81-100.
- [12] R. Lyons, Random walks and percolation on trees. *Ann. Probab.*, **18** (1990), 931–958.
- [13] R. Lyons, Y. Peres. *Probability on trees and networks*. Draft Version 2012.
- [14] R. Lyons, O. Schramm, Indistinguishability of Percolation Clusters. *Ann. Probab.*, **27(4)** (1999), 1809–1836.
- [15] C.M. Newman, L.S. Schulman, Infinite clusters in percolation models. *J. Statist. Phys.*, **26** (1981), 613–628.
- [16] F. Paulin, Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes. *Markov Process. Related Fields*, **5** (1999), 163–200.
- [17] Y. Peres, J.E. Steif, The number of infinite clusters in dynamical percolation. *Probab. Theory Related Fields*, **111** (1998), 141–165.