

ALTERNATIVA LOCAL DE BRUNELLA - IDEAS SOBRE UN TRABAJO EN CURSO

MARIANNA RAVARA VAGO

Introducción

Hace algunos años, Marco Brunella propuso la siguiente conjetura sobre foliaciones holomorfas de codimensión uno en \mathbb{P}^3 :

Sea \mathcal{F} foliación holomorfa de codimensión 1 en \mathbb{P}^3 . Entonces \mathcal{F} cumple una de las siguientes alternativas:

(a) *\mathcal{F} posee una superficie algebraica invariante.*

(b) *Existe una foliación holomorfa \mathcal{G} , por curvas algebraicas, tangente a \mathcal{F} .*

En este texto mostramos el funcionamiento de la Conjetura desde un punto de vista local y simplificado. Siempre consideraremos una foliación \mathcal{F} holomorfa de codimensión uno de $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$ de *tipo general*, es decir, las singularidades no resonantes son linealizables y no hay singularidades de tipo sillan-nodo. El argumento fundamental es que, si \mathcal{F} no tiene germen en el origen de superficie invariante - un objeto que tiene estructura trascendente - entonces la trascendencia “se divide” entre todas las hojas que están en un entorno del origen en la forma de la siguiente propiedad: toda hoja que se acumula en el origen contiene un germen de curva analítica invariante. O sea, esencialmente el objetivo es estudiar la

(Alternativa Local de Brunella) Si \mathcal{F} es una foliación holomorfa de codimensión uno de $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$ de tipo general que no tiene superficie invariante, entonces existe un entorno de $\underline{0} \in \mathbb{C}^3$, W , unión de hojas de \mathcal{F} , tal que cada hoja de $\mathcal{F}|_W$ contiene un germen de curva analítica invariante.

La principal herramienta empleada es el morfismo de reducción de singularidades de \mathcal{F} (ver [1]), que describimos brevemente en la

sección siguiente. En [2], F. Cano y D. Cerveau exhiben condiciones bajo las cuales \mathcal{F} posee un germen en el origen de superficie invariante. En este trabajo usamos el método descrito en [2] para encontrar las obstrucciones a la construcción de dicha superficie - a saber, la existencia de una componente no invariante en la preimagen del origen tras el proceso de desingularización. Visto que este trabajo pretende tratar un caso más simplificado, ponemos condiciones adicionales en el morfismo de reducción.

Parte de este trabajo es hecho desde un punto de vista local (en entornos de los puntos regulares y singulares de la foliación en etapas intermedias de la desingularización), y parte desde un punto de vista global (usamos el término “global” para referirnos al comportamiento de las hojas cerca del divisor excepcional total, también en etapas intermedias de la reducción de singularidades). Para no sobrecargar el texto, en la sección sobre el estudio local preferimos no exponer los detalles demasados técnicos una vez que los mismos ya están descritos en trabajos anteriores (por ejemplo, en [3]). En el estudio global explicamos, también abdicando de los detalles técnicos, los dos tipo fundamentales de argumentos utilizados para llegar al resultado que buscamos.

Finalizamos el texto con un ejemplo sencillo que, esperamos, ayude a fijar las ideas y argumentos presentados.

Reducción de Singularidades en Dimensión 3

Brevemente explicaremos la desingularización de \mathcal{F} , la principal herramienta a ser usada (para más detalles ver [1]). Llamamos $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_N : M_N \rightarrow M_0 = (\mathbb{C}^3, 0)$ el morfismo de reducción de singularidades de \mathcal{F} ,

$$(\mathbb{C}^3, 0) = M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_N} M_N .$$

Utilizamos la siguiente notación ($1 \leq s \leq N$):

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_s, \\ \rho_s &= \pi_{s+1} \circ \pi_{s+2} \circ \cdots \circ \pi_N, \\ Y_{s-1} &= \text{centro de } \pi_s, \\ D_s^s &= \pi_s^{-1}(Y_{s-1}), \end{aligned}$$

$D_i^s =$ transformado estricto por π_s de D_i^{s-1} , $i < s$,

$E^s = D_1^s \cup D_2^s \cup \dots \cup D_s^s =$ divisor excepcional total de cada etapa,

$$\mathcal{F}_1 = \pi_1^* \mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}_s = \pi_s^* \mathcal{F}_{s-1}, \dots, \mathcal{F}_N = \pi_N^* \mathcal{F}_{N-1} = \pi^* \mathcal{F}.$$

En toda etapa intermedia M_s , las componentes irreducibles del divisor E^s y los centros de explosión tienen *cruzamientos normales*, es decir: existen coordenadas (x_1, x_2, x_3) y un número entero m , con $0 \leq m \leq 3$, tales que localmente se tiene $E^s = \{\prod_{i=m+1}^3 x_i = 0\}$, $Y_{s-1} \subset E^s$, y \mathcal{F}_s es generada por una 1-forma $\sum_{i=1}^m a_i(x_1, \dots, x_m) dx_i$. Una componente $D_i^N \subset E^N$ es *dicrítica* si no es invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$, o sea, si es genéricamente transversal a $\tilde{\mathcal{F}}$. Caso contrario, es una componente *invariante*.

El objetivo del morfismo π es hacer con que todos los puntos de $\mathcal{F}_N = \pi^* \mathcal{F}$ en M_N sean *simples* en dimensión 3. Explicaremos como son, desde un punto de vista geométrico, dichos puntos. Definimos el *tipo dimensional* de un punto p , τ_p , como el número de variables necesarias para describir \mathcal{F}_N localmente en p . En dimensión 3, tenemos $1 \leq \tau_p \leq 3$. Sea e_p el número de componentes irreducibles del divisor que contienen p ; entonces podemos tener $0 \leq e_p \leq 3$. Si p es simple, las componentes irreducibles de E^N que contienen p (caso existan) tienen cruzamientos normales y además τ_p y e_p cumplen la desigualdad

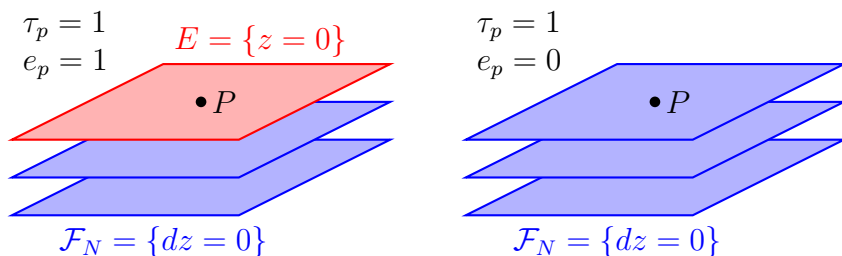
$$\tau_p - 1 \leq e_p \leq \tau_p .$$

Los puntos tales que $e_p = \tau_p$ son llamados *esquinas*, mientras que los puntos tales que $e_p = \tau_p - 1$ son llamados *trazas*.

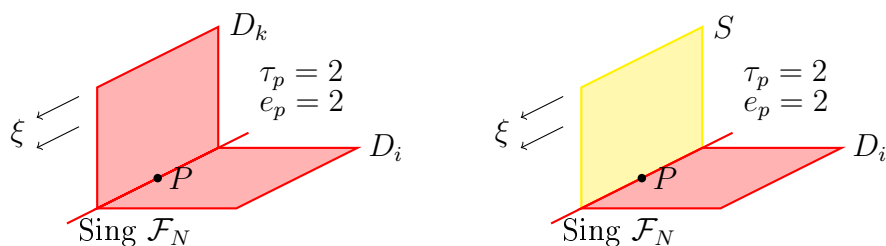
Observación: las componentes dicríticas no son consideradas al calcular e_p y τ_p , pero aún así se debe pensar que, en dimensión 3, el tipo dimensional máximo permitido para cualquier punto simple es 3; es decir, por un punto tal que $\tau_p = 1$ pasan como mucho dos componentes dicríticas (que además es transversal a las dos direcciones trivializadoras), por un punto con $\tau_p = 2$ pasa como mucho una componente dicrítica (transversal a la - única - dirección trivializadora), y por un punto con $\tau_p = 3$ no pasa ninguna componente dicrítica.

Por lo tanto, es posible hacer un catálogo de cómo son, en esencia, los puntos simples en dimensión 3.

Los puntos de tipo dimensional 1 son los puntos regulares de \mathcal{F}_N , y pueden estar en una componente invariante del divisor (en el dibujo abajo tenemos a la izquierda un punto regular esquina) o en una hoja (punto regular traza, a la derecha). Localmente podemos escribir en coordenadas $\mathcal{F}_N = \{dz = 0\}$. Pueden existir una o dos componentes dicríticas pasando por un punto regular, que deben ser transversales a la foliación y entre sí (por ejemplo, los planos coordenados $\{x = 0\}$ y/o $\{y = 0\}$).

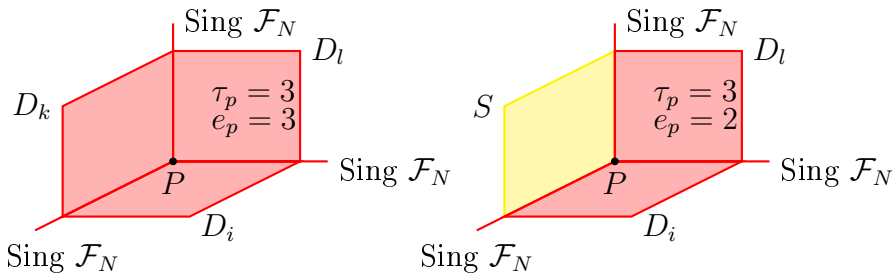


Los puntos de tipo dimensional 2 son esencialmente singularidades simples en dimensión 2 trivializadas por un campo de vectores ξ tangente a \mathcal{F}_N . Como consecuencia, las singularidades de tipo dimensional 2 no son aisladas y los puntos de una misma curva son “iguales”. Si hay alguna componente dicrítica pasando por un punto, dicha componente es obligatoriamente transversal a la dirección trivializadora ξ . A la izquierda tenemos un punto esquina, y a la derecha un punto traza.



Los puntos de tipo dimensional 3 no tienen equivalencia en dimensión 2. Una singularidad p con $\tau_p = 3$ es intersección de tres curvas contenidas en $\text{Sing } \mathcal{F}_N$ cuyos puntos son, cerca de p , singularidades de tipo dimensional 2 - y por lo tanto, es una singularidad aislada. En la figura abajo, tenemos a la izquierda un punto esquina,

y a la derecha un punto traza. Observe que por p no pasa ninguna componente dicrítica.



Presentación del Problema

Vamos a imponer sobre el morfismo $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_N : M_N \rightarrow M_0 = (\mathbb{C}^3, \underline{0})$ las siguientes condiciones adicionales:

- 1: π_1 está centrado en el origen y es la única explosión dicrítica.
- 2: No se usan curvas compactas como centros de explosión. Es decir, si Y_{s-1} es el centro de π_s entonces o bien $Y_{s-1} = \{p_{s-1}\}$ es un punto de $\sigma_{s-1}^{-1}(0)$, o bien Y_{s-1} es un germen de curva con cruzamientos normales con E^{s-1} tal que su imagen $\sigma_{s-1}(Y_{s-1}) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ es un germen de curva.

Por lo tanto se tiene que en cada etapa, el divisor excepcional E^s tiene una parte compacta - $\sigma_s^{-1}(0)$, unión de los D_i^s que se proyectan en el origen - y una parte no compacta - unión de los D_i^s que se proyectan en gérmenes de curva en el origen. El hecho de que la primera explosión es centrada en $\underline{0} \in \mathbb{C}^3$ garantiza que $\sigma_s^{-1}(0)$ es unión de componentes irreducibles de E^s . En [2], F. Cano y D. Cerveau describen un método para la construcción de una superficie invariante cuando la foliación \mathcal{F} es no dicrítica, es decir, cuando todas las componentes irreducibles del divisor excepcional final son invariantes. Dicho método consiste en encontrar una curva de singularidades traza cuyos puntos genéricamente tienen tipo dimensional 2, $\gamma \subset \text{Sing } \mathcal{F}_N$; una vez que en M_N todos los puntos son simples, en cada punto de γ encontramos un germen de superficie invariante que “se reposa” sobre γ . Porque no hay componentes dicríticas es posible prolongar dicho germen de superficie invariante a lo largo de

la componente conexa de curvas de tipo traza que contiene γ y de esa manera obtener una superficie algebraica *cerrada*, que se proyecta por π en una superficie cerrada que se acumula en el origen. Por esa razón, una consecuencia del hecho de que \mathcal{F} no tiene superficie invariante y del método previamente descrito es la existencia de al menos una componente irreducible dicrítica en $\pi^{-1}(\underline{0})$ (parte compacta de E^N); para simplificar el problema, pedimos que dicha componente genéricamente transversal sea únicamente D_1^N , lo que justifica la condición **1**. Pedimos la condición **2** para que la parte compacta del divisor excepcional en cada etapa ($\sigma_s^{-1}(\underline{0})$) sea unión de componentes irreducibles tal que cada componente es isomorfa a un \mathbb{P}^2 en el momento en que es generada.

Volvamos a la Alternativa Local de Brunella. Queremos usar la desingularización de \mathcal{F} a nuestro favor y construir un entorno de $\pi^{-1}(\underline{0})$ que se proyecte en el entorno W de $\underline{0} \in \mathbb{C}^3$ que busquemos. Sabemos que si una hoja \mathcal{L} de \mathcal{F}_N interseca la componente dicrítica D_1^N es posible encontrar un germen de curva analítica contenida en \mathcal{L} . Si \mathcal{L} es una hoja que se acumula en $\pi^{-1}(\underline{0})$ y que corta a D_1^N , entonces $\pi(\mathcal{L})$ se acumula en el origen y contiene un germen de curva analítica invariante. Por lo tanto, queremos mostrar que el conjunto $H \cup E^N$, donde

$$H = \text{unión de hojas de } \mathcal{F}_N \text{ que cortan } D_1^N,$$

es un entorno de $\pi^{-1}(\underline{0})$; así $W = \pi(H)$ será el entorno de $\underline{0} \in \mathbb{C}^3$ que busquemos. O sea, principalmente queremos estudiar el comportamiento de las hojas que se acumulan cerca de $\pi^{-1}(\underline{0})$ y mostrar que, bajo las hipótesis sobre la foliación y el morfismo de desingularización, las hojas que se acumulan cerca de $\pi^{-1}(\underline{0})$ cortan a D_1^N .

Definición Sea $D_i^N \subset E^N$ una componente irreducible invariante. D_i^N está parcialmente cubierta si $H \cup E^N$ es entorno de $D_i^N \setminus (\text{Sing } \mathcal{F}_N \cap D_i^N)$.

Definición Sea $A \subset M_N$ un subconjunto cualquiera. A está bien cubierto si $H \cup E^N$ es entorno de A .

Es decir, nuestro objetivo es mostrar que $\pi^{-1}(\underline{0}) \subset E^N$ está bien cubierto. Lo primero a observar es que si una componente invariante

$D_i^N \subset \pi^{-1}(\underline{0})$ corta a D_1^N , entonces está parcialmente cubierta. De hecho, tomamos una pequeña sección $\Delta_q \subset D_1^N$ transversal a D_i^N en un punto regular q ; entonces $\Delta_q \subset H$ y por lo tanto $\text{Sat}_{\mathcal{F}_N}(\Delta_q)$ es un entorno del punto q . Sea $q' \in D_i^N$ un punto regular cualquiera (distinto de q). Como $D_i^N \setminus (\text{Sing } \mathcal{F}_N \cap D_i^N)$ es conexo por caminos, encontramos un camino compacto α que une q y q' y tal que $\alpha \cap \text{Sing } \mathcal{F}_N = \emptyset$. Cubrimos α con un número finito de abierto foliados y obtenemos que (disminuyendo Δ_q si necesario) $\text{Sat}_{\mathcal{F}_N}(\Delta_q)$ es entorno de q' .

El argumento anterior es generalizado en el siguiente

Lema 1. *Si D_i^N es una componente irreducible de $\pi^{-1}(\underline{0})$ tal que existe una sección Δ_q , transversal a D_i^N en un punto regular q , contenida en $H \cup E^N$, entonces D_i^N está parcialmente cubierta.*

El Lema 1 permite concluir que no es difícil cubrir los puntos regulares de una componente invariante de $\pi^{-1}(\underline{0})$: si un punto regular está bien cubierto entonces esa propiedad se propaga a los demás puntos regulares de dicha componente. La dificultad reside en cubrir los puntos singulares de las componentes invariantes de $\pi^{-1}(\underline{0})$.

En [4], D. Marín y J-F. Mattei dan la siguiente

Definición *En dimensión 2, una singularidad es de tipo nodal si puede ser localmente escrita como*

$$\lambda \frac{dx}{x} + \mu \frac{dy}{y} + \text{términos de mayor grado}$$

donde $\lambda \cdot \mu \neq 0$ y $\lambda \setminus \mu \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \mathbb{Q}_{<0}$.

Las singularidades nodales en dimensión 2 son siempre linealizables y su caracterización topológica es la existencia de un cerrado saturado cuyo complemento es un entorno desconexo de las dos separatrices de la singularidad. En dimensión 3, nos interesan las curvas del conjunto singular tales que genéricamente cada punto tiene tipo dimensional 2 y, al hacer una sección de dimensión 2 transversal a la curva en un punto genérico, dicho punto es una singularidad nodal en la sección. A estas curvas las llamamos *curvas nodales*.

Estudio Local de las Singularidades en Dimensión 3

Explicamos brevemente como es hecho el estudio local del comportamiento de las hojas cerca de los puntos singulares. Empecemos con un punto singular $p \in \pi^{-1}(\underline{0})$ de tipo dimensional 2: p está contenido en dos separatrices de \mathcal{F}_N , supongamos que dichas separatrices sean $D_i^N, D_k^N \subset \pi^{-1}(\underline{0})$ (el argumento que sigue funciona de modo exactamente igual si sustituimos una componente invariante por un germen de superficie en el punto). Tomamos una sección de dimensión uno, Δ_q , transversal a D_i^N en un punto regular q . Entonces en un abierto que contiene q se tiene que todas las hojas de \mathcal{F}_N que se acumulan en q cortan Δ_q . Consideramos ahora una sección plana no invariante por \mathcal{F}_N , Γ , transversal a $D_i^N \cap D_k^N$ en p . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $q \in \Gamma$ y $\Delta_q \subset \Gamma$.

Entonces en Γ tenemos la siguiente situación en dimensión 2: p es un punto singular y la sección Δ_q es transversal a D_i^N en un punto regular. Si p no es singularidad nodal, entonces podemos encontrar un polidisco $\mathbb{D}_\delta^2 \ni p$, $\mathbb{D}_\delta^2 \subset \text{Sat}_{\mathcal{F}_N}|_\Gamma(\Delta_q)$; o sea, las hojas que se acumulan en q (y que por lo tanto cortan Δ_q) también se acumulan en p . Como p es un punto de tipo dimensional 2, esa propiedad es propagada a lo largo de $D_i^N \cap D_k^N$: encontramos un entorno de $D_i^N \cap D_k^N$ que está contenido en $\text{Sat}_{\mathcal{F}_N}(\Delta_q)$ (ver [3]). Si, por otro lado, p es un punto nodal (en dimensión 2), el argumento falla: el saturado de la sección Δ_q no es un entorno de p en Γ , y como consecuencia $\text{Sat}_{\mathcal{F}_N}(\Delta_q)$ no es un entorno de $D_i^N \cup D_k^N$.

Sea ahora p una singularidad de tipo dimensional 3, y sean $D_i^N, D_k^N, D_l^N \subset \pi^{-1}(\underline{0})$ las tres separatrices que se intersecan en p (nuevamente, el argumento es verdadero si sustituimos una componente invariante por un germen de superficie en el punto). Como las singularidades no resonantes son linealizables podemos escribir localmente en p

$$\mathcal{F}_N = \left\{ \omega = \frac{dx}{x} + \lambda \frac{dy}{y} + \mu \frac{dz}{z} = 0 \right\}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}^*.$$

Queremos repetir la idea del argumento anterior: tomar una sección Δ_q transversal a D_i^N en un punto regular q y estudiar en cuales condiciones se tiene que $\text{Sat}_{\mathcal{F}_N}(\Delta_q)$ es un entorno del origen \underline{p} .

Ponemos coordenadas locales en \underline{p} : $\underline{p} = (0, 0, 0)$ el origen, y $D_i^N = \{z = 0\}$, $D_k^N = \{x = 0\}$, $D_l^N = \{y = 0\}$. Sea $q = (1, 1, 0)$ y $\Delta_q = \{1\} \times \{1\} \times \mathbb{D}_\varepsilon$. Sea $P' = (p_1, p_2, p_3)$ un punto próximo de \underline{p} tal que $p_i \neq 0 \forall i$ (o sea, $P' \notin D_i^N \cup D_k^N \cup D_l^N$). Tomamos la sección plana $\Gamma_{P',y} = \{y = p_2\}$. Consideremos el punto $q' = (1, p_2, 0) \in \Gamma_{P',y}$ y la sección $\Delta_{q'} = \{1\} \times \{p_2\} \times \mathbb{D}_{\varepsilon'}$: como q' es un punto regular de D_i^N , podemos tomar ε' suficiente pequeño de manera que las hojas que corten a $\Delta_{q'}$ también corten a Δ_q . Por lo tanto queremos encontrar un δ suficientemente pequeño tal que para todo punto en $\mathbb{D}_\delta \times \{p_2\} \times \mathbb{D}_\delta$, la hoja de \mathcal{F}_N que pasa por dicho punto corta a $\Delta_{q'}$, y en consecuencia a Δ_q .

Como en dimensión 2, el comportamiento de las hojas es consecuencia de la naturaleza de λ, μ . Los posibles casos son:

1- λ o $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Podemos encontrar un polidisco $\mathbb{D}_\delta^3 \ni p$, $\mathbb{D}_\delta^3 \subset \text{Sat}_{\mathcal{F}_N}(\Delta_q)$. Hay dos posibilidades que dependen de λ, μ : o bien los tres ejes X, Y, Z son no nodales, o bien como máximo uno de los tres ejes es nodal. En ambos casos no hay problema en encontrar el polidisco \mathbb{D}_δ^3 .

2- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$. Los tres ejes X, Y, Z no son nodales y también encontramos polidisco $\mathbb{D}_\delta^3 \ni p$, $\mathbb{D}_\delta^3 \subset \text{Sat}_{\mathcal{F}_N}(\Delta_q)$.

3- $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\mu \in \mathbb{R}_{<0}$. Entonces los ejes X, Y son nodales y el eje Z no lo es. En ese caso, $\text{Sat}_{\mathcal{F}_N}(\Delta_q)$ no es entorno de \underline{p} (más bien tiene un formato de cuña que separa D_i^N de las otras dos separatrices). Sin embargo encontramos un entorno de $X \cup Y$ tal que las hojas que se acumulan en X también se acumulan en Y , es decir, un “entorno tubular” de $X \cup Y$ donde el comportamiento de las hojas cerca de un eje se propaga al otro eje.

Pasaje al Estudio Global

Veamos ahora las implicaciones que siguen del estudio local en el comportamiento de las hojas cerca de las componentes invariantes de $\pi^{-1}(\underline{0})$.

Proposición 1. *Si $\text{Sing } \mathcal{F}_N$ no tiene curvas nodales entonces $\pi^{-1}(\underline{0})$ está bien cubierto.*

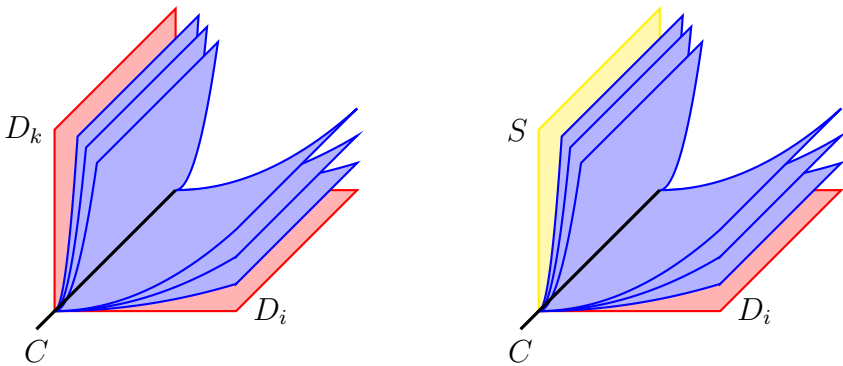
Dem: El grafo dual de $\pi^{-1}(\underline{0})$ es conexo; dada $D_l^N \subset \pi^{-1}(\underline{0})$ invariante, encontramos secuencia finita de componentes invariantes

$E_{l,1} = D_l^N, \dots, E_{l,m-1} = D_s^N, E_{l,m} = D_1^N, E_{l,i-1} \cap E_{l,i} \neq \emptyset$,
que conectan D_l^N a la componente dicrítica $D_1^N \subset \pi^{-1}(\underline{0})$.

La componente $E_{l,m-1} = D_s^N$ está parcialmente cubierta ya que interseca a D_1^N . Una vez que por hipótesis no hay curvas nodales, como consecuencia del estudio local tenemos que los puntos singulares de $E_{l,m-1}$ están bien cubiertos y por lo tanto $E_{l,m-2}$ - que se interseca con $E_{l,m-1}$ - también está bien cubierta; por inducción, toda componente $E_{l,i}$ está bien cubierta para todo i . \square

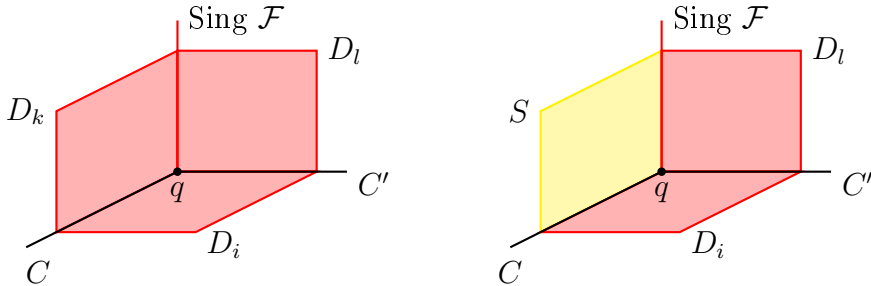
La obstrucción en mostrar que $\pi^{-1}(\underline{0})$ está bien cubierto surge cuando tenemos curvas nodales. En particular, como consecuencia del estudio local son dos las situaciones que resultan problemáticas:

1- Cuando la curva nodal C contiene apenas puntos de tipo dimensional 2:



En ambos casos no se puede decir que si D_i está parcialmente cubierta entonces D_k/S también lo está; o que si D_i está parcialmente cubierta entonces $H \cup E^N$ es entorno de C .

2– Cuando la curva nodal C contiene un punto de tipo dimensional 3 que es intersección de dos curvas nodales:



En ambos casos si D_k/S está parcialmente cubierta entonces D_l también lo está, pero no se puede decir nada de D_i ; tampoco se puede decir que cualquiera de las componentes está bien cubierta. Pero observe que las curvas C y C' están en la misma componente conexa de curvas nodales y por esta razón encontramos un “entorno tubular” de $C \cup C'$.

En las dos situaciones anteriores no se puede repetir el argumento usado en la Proposición 1 y por lo tanto somos forzados a cambiar el trato del problema. Lo que haremos es mostrar que si existe una componente conexa de curvas nodales cumpliendo 1– o 2– - la llamaremos una componente conexa *no interrumpida* - entonces dicha componente conexa necesariamente no interrumpida corta transversalmente a la componente dicrítica $D_1^N \subset \pi^{-1}(\underline{0})$. Como hemos visto en el estudio local, existe un entorno tubular alrededor de la componente conexa no interrumpida; al hacerla tocar D_1^N , las hojas cerca de la componente irreducible que toca la componente dicrítica poseerán un germen de curva analítica invariante y esta propiedad será propagada a lo largo de toda la componente conexa no interrumpida gracias a la existencia de dicho entorno tubular. Y con eso terminaremos de cubrir $\pi^{-1}(\underline{0})$ con el entorno $H \cup E^N$ que buscábamos.

Consideremos el conjunto \mathcal{N} unión de las curvas $C \subset \text{Sing } \mathcal{F}_N \subset M_N$ que cumplen:

- i*–: C es irreducible y $C \subset \text{Sing } \mathcal{F}_N$.
- ii*–: Los puntos de tipo dimensional 2 en C son nodales.

iii—: Si \mathcal{C} es una componente conexa, $\mathcal{C} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$, C_i componentes irreducibles, todo punto $q \in \mathcal{C}$ de tipo dimensional 3 es la intersección de dos de estas componentes: $q = C_k \cap C_{k'}$.

Proposición 2. *Toda componente conexa \mathcal{C} de \mathcal{N} tiene intersección no vacía con la componente dicrítica $D_1^N \subset \pi^{-1}(0)$.*

Dem: Aquí explicamos, sin entrar en los detalles técnicos, la idea fundamental de la demostración. Supongamos que exista una componente conexa \mathcal{C} de \mathcal{N} tal que $\mathcal{C} \cap D_1^N = \emptyset$. El argumento principal consiste en mostrar que \mathcal{C} “nace” al mismo tiempo que la primera componente irreducible invariante de $\pi^{-1}(0)$. Es decir, sea $p_1 \in D_1^1$ el centro de explosión de π_2 . Entonces en el interior de la componente invariante $D_2^2 = \pi_2^{-1}(p_1)$ ya existirá una curva compacta nodal C_1 ; como no se usan curvas compactas como centros de explosión, en el proceso de desingularización de \mathcal{F} modificaremos como máximo un número finito de puntos de C_1 , es decir, en M_N se tiene que C_1 es una componente irreducible de \mathcal{C} . En M_2 , como $D_2^2 \simeq \mathbb{P}^2$, las curvas compactas C_1 y $D_2^2 \cap D_1^2$ se intersecan (o sea, C_1 corta transversalmente a la componente dicrítica D_1^2); la demostración finaliza observando que la propiedad de que una curva nodal interseque la componente dicrítica es *estable*. Es decir, si una componente irreducible de \mathcal{C} interseca D_1^s en una etapa intermedia M_s de la reducción de singularidades de \mathcal{F} , entonces \mathcal{C} interseca D_1^N en M_N . \square

Un Ejemplo

Ahora daremos un ejemplo muy sencillo únicamente para fijar las ideas. Sin embargo este es un ejemplo interesante pues presentamos un argumento (cuya demostración está en [5]) que hace parte de la demostración de la Proposición 2 y que hará ver cómo se carga la componente no interrumpida \mathcal{C} hacia la componente dicrítica D_1^N , mostrando que de hecho \mathcal{C} y la primera componente compacta invariante nacen juntas.

Sea \mathcal{F} una foliación holomorfa de codimensión uno de $(\mathbb{C}^3, 0)$ sin superficie invariante y supongamos que se puede desingularizar \mathcal{F} haciendo tres explosiones centradas en puntos: sea $\pi = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1 :$

$M_3 \rightarrow M_0 = (\mathbb{C}^3, \underline{0})$ donde el centro de π_1 es el origen (y además, por las hipótesis, π_1 es la única explosión dicrítica), el centro de π_2 es un punto $p_1 \in D_1^1 = \pi_1^{-1}(\underline{0})$ y el centro de π_3 es un punto $p_2 \in D_2^2 = \pi_2^{-1}(p_1)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que p_1 es la intersección de X' (el transformado estricto del eje $X = \{y = z = 0\}$ por π_1) y D_1^1 , y que p_2 es la intersección de X'' (el transformado estricto del eje $X' = \{y' = z' = 0\}$ por π_2) y D_2^2 . Por último, supongamos que $\mathcal{C} = D_3^3 \cap D_2^3$ - o sea, inicialmente \mathcal{C} no interseca con D_1^3 .

Sea $\Delta \subset (\mathbb{C}^3, \underline{0})$ una sección plana no invariante por \mathcal{F} que contiene el eje X , y sea $\tilde{\Delta} = \pi^* \Delta \subset M_3$; entonces $\tilde{\Delta}$ es no invariante por $\mathcal{F}_3 = \pi^* \mathcal{F}$ y contiene el eje X''' (el transformado estricto de $X'' = \{y'' = z'' = 0\}$ por π_3). Como $\tilde{\Delta}$ es no invariante por \mathcal{F}_3 se tiene que $\mathcal{F}_3|_{\tilde{\Delta}}$ es foliación en dimensión 2 donde pasa la siguiente situación: existen tres componentes irreducibles del divisor excepcional, $D_1 = D_1^3 \cap \tilde{\Delta}$ (que es dicrítica), $D_2 = D_2^3 \cap \tilde{\Delta}$ y $D_3 = D_3^3 \cap \tilde{\Delta}$, las dos últimas invariantes y además $D_1, D_2, D_3 \simeq \mathbb{P}^1$. Todos los puntos de $\mathcal{F}_3|_{\tilde{\Delta}}$ son simples porque todos los puntos de \mathcal{F}_3 lo son, y el punto $p = D_2 \cap D_3 = (D_2^3 \cap D_3^3) \cap \tilde{\Delta}$ es nodal en dimensión 2. Aplicamos el resultado principal de [5]: encontramos un punto $q \in D_3 \subset \tilde{\Delta}$ que no es nodal en dimensión 2 y tal que por q pasa una separatriz convergente γ_q .

Entonces encontramos un punto $q \in D_3^3$ que admite un germen de separatriz convergente pasando por él; como por hipótesis todos los puntos de M_3 son simples, existe un germen de superficie invariante en q ; por lo tanto q es un punto de tipo dimensional 2 de tipo traza: $q \in \Gamma$ donde $\Gamma \subset D_3^3$, $\Gamma \subset \text{Sing } \mathcal{F}_3$ es una curva de singularidades de tipo traza. Luego tenemos que \mathcal{C} y Γ son dos curvas compactas contenidas en $D_3^3 \simeq \mathbb{P}^2$, o sea, \mathcal{C} y Γ se intersecan y además q' , el punto de intersección, es simple, de tipo dimensional 3 y traza: además de estar en \mathcal{C} y Γ , q' pertenece a una curva traza $\Gamma' \subset D_2^3$, $\Gamma \subset \text{Sing } \mathcal{F}_3$. Como \mathcal{C} es no interrumpida se tiene obligatoriamente que Γ' es una componente irreducible de \mathcal{C} .

Pero observe que cómo Γ' es una curva interior de D_2^3 entonces Γ' es el transformado estricto de una curva que ya existía en M_2 y que contenía el punto p_2 - centro de explosión de π_3 -, el único punto de dicha curva que fue modificado por π_3 : $\Gamma' \subset D_2^2$, $\Gamma' \subset \text{Sing } \mathcal{F}_2$. En M_2 , Γ' y $D_1^2 \cap D_2^2$ son dos curvas compactas contenidas en $D_2^2 \simeq \mathbb{P}^2$, que por lo tanto se intersecan, sea Q el punto de intersección. O sea, \mathcal{C} llega hasta la componente dicrítica en la etapa intermedia M_2 - a principio, podría no hacerlo en la etapa final M_3 . Sin embargo como los únicos puntos modificados son el origen, p_1 y p_2 , se tiene que $Q \in \mathcal{C}$ en M_3 y por lo tanto \mathcal{C} llega hasta la componente dicrítica D_1^3 .

Es a esta última observación que nos referimos cuando decimos que el hecho de que la componente no interrumpida \mathcal{C} interseca la componente dicrítica en una etapa intermedia es una propiedad estable. En este ejemplo es muy sencillo ver cómo funciona el argumento principal de la demostración de la Proposición 2: si suponemos inicialmente que \mathcal{C} surge solamente con la última explosión invariante, al final encontramos una componente irreducible que había nacido junto con la primera componente invariante (aplicando el resultado principal de [5]). Por último queremos observar que por inducción el argumento arriba es válido si tenemos N explosiones puntuales.

REFERENCIAS

- [1] F. CANO, *Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three*, Annals of Mathematics (2), 160(3):907-1011 (2004).
- [2] F. CANO, D. CERVEAU, *Desingularization of nondicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*, Acta Mathematica, 169(1-2):1-103 (1992).
- [3] D. MARÍN, J.F. MATTEI, *L'incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers*, (2006).
- [4] D. MARÍN, J.F. MATTEI, *Monodromy and topological classification of germs of holomorphic foliations*, (2010).
- [5] L. ORTIZ-BOBADILLA, E. ROSALES-GONZÁLEZ, S.M. VORONIN, *On Camacho-Sad's Theorem about the existence of a separatrix*, (2008).